Institut für angewandte Mathematik
der
Universität Bonn

Konstruktion von Lösungen zu Riemannproblemen in zwei Raumdimensionen

Diplomarbeit

Harald Garcke

Referent: Prof. Dr. H.W. Alt

Bonn 1988

Inhalt:

1. Einleitung 3

2. Grundlagen skalarer Erhaltungsgleichungen in zwei Raumdimensionen 5

3. Eigenschaften von Riemannlösungen 8

4. Methoden der Konstruktion und einfache Fälle 15

5. Konstruktion der Enveloppewelle 40

6. Abschließende Bemerkungen und mögliche Verallgemeinerungen 78

Literatur 81

EINLEITUNG

In dieser Arbeit sollen Lösungen zum Cauchyproblem der skalaren Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \tag{1}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y) \tag{2}$$

mit $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ konstruiert werden. Da Lösungen zu dem Problem (1),(2) auch bei sehr glatten Anfangsdaten im allgemeinen zu Unstetigkeiten führen, betrachtet man die Gleichung im schwachen Sinne. Dieser Lösungsbegriff liefert allerdings mehrere zulässige Lösungen. Um die physikalisch sinnvolle Lösung zu erhalten, führt man die Entropiebedingung ein. Kruzkov [5] konnte mit Hilfe der Viskositätsmethode zeigen, daß genau eine Lösung existiert, die der Entropiebedingung genügt. Allerdings ist bisher wenig über das qualitative Verhalten von Lösungen bekannt. Dies führt zu der Aufgabe, Lösungen für Spezialfälle explizit zu konstruieren. In einer Raumdimension hat die Untersuchung des Riemannproblems

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$u(0,x) = \begin{cases} u_l\,, & \text{für } x < 0 \\ u_r\,, & \text{für } x > 0 \end{cases},$$

mit $u_l, u_r \in \mathbb{R}$, einen entscheidenden Beitrag zum Verständnis der eindimensionalen Erhaltungsgleichung geleistet. Ein zweidimensionales Analogon ist die Gleichung (1) mit Anfangsdaten der Form

$$u(0,x,y) = \begin{cases} u_1\,, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y > 0 \\ u_2\,, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y > 0 \\ u_3\,, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ u_4\,, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}. \tag{2A}$$

Im Fall $f = g$ führt die Transformation $\zeta = x + y, \eta = x - y$ auf die Gleichung

$$u_t + 2\,f(u)_\zeta = 0 \quad .$$

Diese Gleichung ist räumlich eindimensional und kann mit bekannten Methoden gelöst werden. Chang und Klingenberg [1] geben für allgemeinere Anfangsdaten als (2A) die Konstruktionsprinzipien an.

Für den Fall $f \neq g$ konstruierten Chang und Zheng [2] die Lösungen unter der Voraussetzung, daß $f'' > 0$ und $g'' > 0$ sind und jede Linearkombination von f und g höchstens

eine Wendestelle hat. Klingenberg und Hsiao [4] konstruierten als Beispiel für nichtkonvexe Flußfunktionen die Lösung für den Fall $f = u^2$, $g = u^3$ mit $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_4$. Auch in diesem Fall hat jede Linearkombination von f und g höchstens eine Wendestelle.

In dieser Arbeit werden Lösungen zu (1),(2A) konstruiert im Fall, daß $f'' > 0$ und $g'' > 0$ sind und Linearkombinationen von f und g mehr als eine Wendestellen haben. Es zeigt sich, daß die Lösungen stückweise glatt sind. Die dargestellten Methoden reichen kombiniert mit den aus [1] bekannten Methoden aus, um Lösungen für eine größere Klasse von Flußfunktionen f und g zu konstruieren.

Es ergibt sich folgender Aufbau der Arbeit :
In Kapitel 2 gebe ich einige grundlegende Sätze über skalare Erhaltungsgleichungen wie Existenz, Eindeutigkeit und endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Anfangsdaten an. Außerdem gebe ich eine Verallgemeinerung der eindimensionalen Sprung- und Entropiebedingung auf zwei Raumdimensionen an. Es ergibt sich eine Charakterisierung stückweiser glatter Lösungen.

Im Kapitel 3 zeige ich, daß Lösungen zu Riemannanfangsdaten selbstähnlich sind, d.h sie sind konstant auf Strahlen durch den Ursprung. Durch diese Eigenschaft reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Variablen auf zwei. Dies führt zu einem neuen Lösungsbegriff, der es erlaubt die Konstruktion zu einem festen Zeitpunkt $t > 0$ durchzuführen.

Das Kapitel 4 leitet die fundamentalen Konstuktionsprinzipien her. Wegen des Prinzips der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Anfangsdaten, kann das Problem entlang der Achsen für große $|x|$ und $|y|$ in vier eindimensionale Riemannprobleme aufgespalten werden. Die Schwierigkeit liegt darin, die vier eindimensionalen Wellen in der Nähe des Ursprungs zusammenzusetzen. Es zeigt sich, daß eine nähere Untersuchung der Entropiebedingung notwendig wird. Diese Analyse macht den Hauptteil des Kapitels 4 aus.

Es zeigt sich, daß Lösungen zu (1),(2A) sehr komplex werden, wenn f und g so beschaffen sind, daß es Linearkombinationen gibt, die "viele" Wendestellen haben. Um Lösungen ohne zu großen Aufwand noch explizit angeben zu können, mache ich im Kapitel 5 die zusätzliche Voraussetzung, daß der Ausdruck $\left(\frac{g''}{f''}\right)'$ höchstens eine Wendestelle hat. Aus dieser Voraussetzung folgt, daß jede Linearkombination von f und g höchstens zwei Wendestellen hat. Im weiteren wird die Enveloppewelle konstruiert, d.h. eine Welle, die aus Charakteristiken besteht, die tangential aus einem Schock herauslaufen. Als weiteres Phänomen tritt eine Aufspaltung von Schocks auf.

Im Kapitel 6 wird kurz beschrieben, wie die in den Kapiteln 4 und 5 hergeleiteten Methoden verallgemeinert werden können.

KAPITEL 2

GRUNDLAGEN SKALARER ERHALTUNGSGLEICHUNGEN IN ZWEI RAUMDIMENSIONEN

In diesem Kapitel schildere ich zunächst, was ich unter der Entropielösung einer skalaren Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \tag{1}$$

zu den Anfangsdaten

$$u(0,x,y) = u_0(x,y) \tag{2}$$

verstehe. Die Funktionen f und g seien zweimal stetig differenzierbar und u_0 sei eine beschränkte, meßbare Funktion. Außerdem gebe ich einige bekannte Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit an. Anschließend betrachte ich den Lösungsbegriff für stückweise stetige Lösungen.

2.1 Definition (Entropielösung)
Eine beschränkte meßbare Funktion $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt schwache Lösung des Problems (1),(2), falls
(i) für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ gilt :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x + g(u)\varphi_y)\, dx\, dy\, dt = 0$$

(ii) $\operatorname{esslim}_{t \searrow 0} u(t,.,.) = u_0$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.
Eine schwache Lösung des Problems (1),(2) heißt Entropielösung, falls
(iii) für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ mit $\varphi \geq 0$ und für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} sign\,(u-k)\,[(u-k)\,\varphi_t + (f(u)-f(k))\,\varphi_x + (g(u)-g(k))\,\varphi_y]\, dx\, dy\, dt \geq 0 \quad .$$

BEMERKUNG:
Die Ungleichung in (iii) beinhaltet die schwache Formulierung, wenn man die Willkür der Wahl der Testfunktion $\varphi \geq 0$ ausnutzt und $k = \pm \sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2} |u(t,x,y)|$ wählt.

Folgende Theoreme konnte Kruzkov [5] in den 60'er Jahren beweisen:

2.2 Theorem(Existenz)

Eine Entropielösung des Problems (1),(2) existiert.

2.3 Theorem

Seien u und v Entropielösungen zu (1) mit Anfangsfunktionen u_0 und v_0 und es sei M, so daß $|u(t,x,y)| \leq M$ und $|v(t,x,y)| \leq M$. Außerdem sei $N = \max\limits_{\substack{|w| \leq M \\ w \in \mathbb{R}}} \sqrt{f^2(w) + g^2(w)}$. Dann gilt für alle $R > 0$, für fast alle $\tau \in \mathbb{R}$ und für beliebiges (x_0, y_0)

$$\int\limits_{B_R(x_0,y_0)} |u(\tau,x,y) - v(\tau,x,y)|\, dxdy \leq \int\limits_{B_{R+N\tau}(x_0,y_0)} |u_0(x,y) - v_0(x,y)|\, dxdy \quad .$$

Betrachtet man $u_0 = v_0$, ergibt sich das folgende Korollar :

2.4 Korollar

Es existiert genau eine Entropielösung zu dem Problem (1),(2) .

2.5 Bemerkungen

1.) Es seien u, v, u_0, v_0 wie in Theorem 2.3. Gilt nun $u_0 = v_0$ in $\mathbb{R} \setminus B_R(x_0, y_0)$ ($R > 0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$), dann folgt :

$$u = v \text{ in } \{(t,x,y)| \quad |(x,y) - (x_0,y_0)| > R + Nt\} \quad .$$

Diese Aussage kann folgendermaßen interpretiert werden:

Das Einflußgebiet der Anfangsdaten breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit aus. Eine lokale Abänderung der Anfangsdaten hat für die Gestalt der Lösung zu einem späteren Zeitpunkt nur einen lokalen Einfluß. Diese Eigenschaft der Lösung wird bei der Konstruktion der Riemannlösungen wichtig werden.

2.) Kruzkov hat die obigen Aussagen für $n \geq 1$ Raumdimensionen gezeigt. Für meine Zwecke reicht aber die angegebene Version für $n = 2$.

Die Konstruktionen in dieser Arbeit sollen in der Klasse der stückweise glatten Funktionen vorgenommen werden. Eine stückweise glatte Lösung erfüllt (1) in Punkten, in denen sie klassisch differenzierbar ist, stark und über Sprungunstetigkeiten hinweg sind die folgenden zwei Bedingungen erfüllt (zur Definition von stückweise glatten Funktionen siehe [7]).

2.6 Sprungbedingung

Sei $P = (t_0, x_0, y_0)$ ein Punkt auf einer Unstetigkeitsfäche Γ und $\vec{n}$ eine Normale an Γ in P. Weiterhin sei $u_+ := \lim_{\epsilon \searrow 0} u(P + \epsilon\vec{n})$ und $u_- := \lim_{\epsilon \searrow 0} u(P - \epsilon\vec{n})$.

Dann gilt:

$$\vec{n} \cdot (u_+ - u_-, f(u_+) - f(u_-), g(u_+) - g(u_-)) = 0 \quad .$$

2.7 Entropiebedingung

Sei $\vec{n}$ so orientiert, daß $u_+ \geq u_-$. Dann gilt für alle $k \in [u_-, u_+]$

$$\vec{n} \cdot (k - u_-, f(k) - f(u_-), g(k) - g(u_-)) \geq 0 \quad .$$

Umgekehrt erfüllt eine stückweise glatte Funktion, die in Punkten in denen sie stark differenzierbar ist, die Differentialgleichung stark erfüllt und über Sprungunstetigkeiten hinweg der Sprungbedingung genügt, die schwache Formulierung der Gleichung (1). Ist zusätzlich über Sprungunstetigkeiten hinweg die lokale Formulierung der Entropiebedingung (2.7) erfüllt, so gilt die Entropiebedingung auch im integralen Sinne (2.1.(iii)). Diese Aussagen lassen sich mittels partieller Integration und spezieller Wahl von φ und k beweisen (siehe [5] und [9]).

Kapitel 3

Eigenschaften von Riemannlösungen

3.1 Definition

Unter einem Riemannproblem versteht man folgende Aufgabe:

Gesucht ist eine Entropielösung zu der Gleichung

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \tag{1}$$

mit den Anfangsdaten

$$u(0,x,y) = \begin{cases} u_1, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y > 0 \\ u_2, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y > 0 \\ u_3, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ u_4, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y < 0 \end{cases} \quad . \tag{2}$$

Dabei seien $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}$. Lösungen von (1),(2) seien im folgenden als Riemannlösungen bezeichnet.

Aus dem folgenden Lemma folgt, daß Riemannlösungen selbstähnlich sind, d.h. sie sind konstant auf Strahlen durch den Ursprung.

3.2 Lemma

Sei $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Entropielösung der Gleichung

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y) \quad .$$

Außerdem gelte für alle $c > 0$, daß $u_0(x,y) = u_0(cx,cy)$. Dann gilt für alle $c > 0$

$$u(t,x,y) = u(ct,cx,cy) \quad .$$

Beweis:

Sei $u_c(t,x,y) := u(ct,cx,cy)$ für ein beliebiges $c > 0$. u_c hat die gleichen Anfangswerte wie u und erfüllt die schwache Formulierung der Differentialgleichung und die Entropiebedingung. Aus der Eindeutigkeit der Entropielösung folgt :

$$u(t,x,y) = u_c(t,x,y) = u(ct,cx,cy)$$

q.e.d.

Im Falle von Riemannanfangsdaten kann ich also folgenden Ansatz für die Lösung machen

$$u(t,x,y) = u(1, \frac{x}{t}, \frac{y}{t}) = \tilde{u}(\zeta, \eta)$$

mit $\zeta = x/t$, $\eta = y/t$ und $\tilde{u} : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$. Im folgenden soll $\tilde{u}$ konstruiert werden. Ich untersuche, welche Eigenschaften $\tilde{u}$ haben muß, damit u Entropielösung ist. Da ich stückweise glatte Lösungen konstruieren werde, untersuche ich zunächst, wie $\tilde{u}$ in "glatten Bereichen" zu konstruieren ist und anschließend, was in Sprungunstetigkeiten gelten muß, damit u Lösung des Problems (1),(2) ist.

Sei u eine Lösung des Riemannproblems. Außerdem sei $P = (t,x,y)$ ein regulärer Punkt von u, d.h. u sei in einer Umgebung von P klassisch differenzierbar. Dann ist $\tilde{u}$ in einer Umgebung des Punktes $(\zeta, \eta) = (x/t, y/t)$ differenzierbar.

Es folgt :

$$\begin{aligned} u_t &= \tilde{u}_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\tilde{u}_\zeta \frac{\zeta}{t} - \tilde{u}_\eta \frac{\eta}{t} \\ u_x &= \tilde{u}_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{u}_\zeta \frac{1}{t} \\ u_y &= \tilde{u}_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} = \tilde{u}_\eta \frac{1}{t} \end{aligned} \tag{3}$$

Differenziert man in der Differentialgleichung (1) $f(u)_x$ und $g(u)_y$ aus, erhält man die folgende quasilineare Formulierung der Gleichung

$$u_t + f'(u)u_x + g'(u)u_x = 0 \quad .$$

Mit (3) ergibt sich

$$-\tilde{u}_\zeta \frac{\zeta}{t} - \tilde{u}_\eta \frac{\eta}{t} + f'(\tilde{u})\tilde{u}_\zeta \frac{1}{t} + g'(\tilde{u})\tilde{u}_\eta \frac{1}{t} = 0 \quad .$$

Es folgt

$$(f'(\tilde{u}) - \zeta)\tilde{u}_\zeta + (g'(\tilde{u}) - \eta)\tilde{u}_\eta = 0 \quad .$$

$\tilde{u}$ muß obige Gleichung in regulären Punkten erfüllen, falls u Lösung des Problems (1),(2) sein soll.

Als nächstes untersuche ich, was $\tilde{u}$ über Sprungunstetigkeiten hinweg erfüllen muß, damit u Entropielösung ist. Flächen auf denen u unstetig ist, ergeben Schockkurven für die Funktion $\tilde{u}$. Wegen der Selbstähnlichkeit von u hat eine Schockkurve S die folgende Gestalt:

$$S = \{ (t, \zeta(s)t, \eta(s)t) \,|\, t \in (0,\infty), s \in I \}$$

Dabei sei

i) $I = (a,b) \subset I\!R$ ein Intervall ,

ii) $\zeta, \eta \in C^1(I, I\!R)$ mit $(\zeta', \eta')(s) \neq 0$ für alle $s \in I$,

iii) (ζ, η) injektiv.

Für die Betrachtung der Sprung- und Entropiebedingung benötige ich eine Normale an den Schock. Um die Normale zu bestimmen, berechne ich zunächst zwei Tangentialvektoren an die Schockfläche. Es ergeben sich

$$\vec{\tau}_1 = \frac{\partial}{\partial t}(t, \zeta(s)t, \eta(s)t) = (1, \zeta(s), \eta(s)) \qquad \text{und}$$

$$\vec{\tau}_2 = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial s}(t, \zeta(s)t, \eta(s)t) = (0, \zeta'(s), \eta'(s)) \quad .$$

Durch das Vektorprodukt zwischen $\vec{\tau}_1$ und $\vec{\tau}_2$ erhält man eine Normale $\vec{n}$.

$$\vec{n} = \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 = (\zeta(s)\eta'(s) - \zeta'(s)\eta(s), -\eta'(s), \zeta'(s))$$

Die Sprungbedingung für einen Punkt P auf der Schockunstetigkeit lautet:

$$\vec{n} \cdot (u_+ - u_-, f(u_+) - f(u_-), g(u_+) - g(u_-)) = 0$$

mit $u_+ := \lim_{\epsilon \searrow 0} u(P + \epsilon\vec{n})$ und $u_- := \lim_{\epsilon \searrow 0} u(P - \epsilon\vec{n})$. Damit ergibt sich:

$$\zeta(s)\eta'(s) - \zeta'(s)\eta(s) - \eta'(s)\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} + \zeta'(s)\frac{g(u_+) - g(u_-)}{u_+ - u_-} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \eta'(s)\left(\zeta(s) - \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}\right) - \zeta'(s)\left(\eta(s) - \frac{g(u_+) - g(u_-)}{u_+ - u_-}\right) = 0$$

Damit erhält man :

$$n_x(\zeta - \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}) + n_y(\eta - \frac{g(u_+) - g(u_-)}{u_+ - u_-}) = 0 \tag{4}$$

Es sei dabei $\vec{n} = (n_t, n_x, n_y)$. Der Vektor $n = (n_x, n_y)$ ist eine Normale an die Schockkurve (ζ, η). Aus (4) folgt, daß $(\zeta - \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \eta - \frac{g(u_+) - g(u_-)}{u_+ - u_-})$ und die Tangente an die Schockkurve die gleiche Richtung haben. Das bedeutet, daß die Tangente durch den Punkt $(\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \frac{g(u_+) - g(u_-)}{u_+ - u_-})$ geht.

Jetzt untersuche ich, was aus der Entropiebedingung für $\tilde{u}$ folgt. Die Normale $\vec{n}$ sei jetzt so orientiert, daß $u_+ > u_-$. Die Entropiebedingung besagt, daß für alle k mit $u_- \leq k \leq u_+$ gilt:

$$\vec{n} \cdot (k - u_-, f(k) - f(u_-), g(k) - g(u_-)) \geq 0$$

Daraus folgt:

$$n_t + n_x\frac{f(k) - f(u_-)}{k - u_-} + n_y\frac{g(k) - g(u_-)}{k - u_-} \geq 0 \tag{$*$}$$

Aus der Sprungbedingung folgt:

$$n_t = -n_x\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} - n_y\frac{g(u_+) - g(u_-)}{u_+ - u_-} \tag{$**$}$$

Aus (*) und (**) folgt:

$$n_x \frac{f(k) - f(u_-)}{k - u_-} + n_y \frac{g(k) - g(u_-)}{k - u_-} \geq n_x \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} + n_y \frac{g(u_+) - g(u_-)}{u_+ - u_-}$$

und zwar für alle k mit $u_- \leq k \leq u_+$. Diese Bedingung ist äquivalent zu:

$$\frac{F(k) - F(u_-)}{k - u_-} \geq \frac{F(u_+) - F(u_-)}{u_+ - u_-} \qquad \text{für } u_- \leq k \leq u_+$$

Dabei ist $F(v) = n_x f(v) + n_y g(v)$.

Aus der obigen Ungleichung folgt, daß der Graph der Funktion F zwischen u_- und u_+ oberhalb der Sekanten zwischen diesen beiden Punkten liegen muß (siehe Abbildung 3.1).

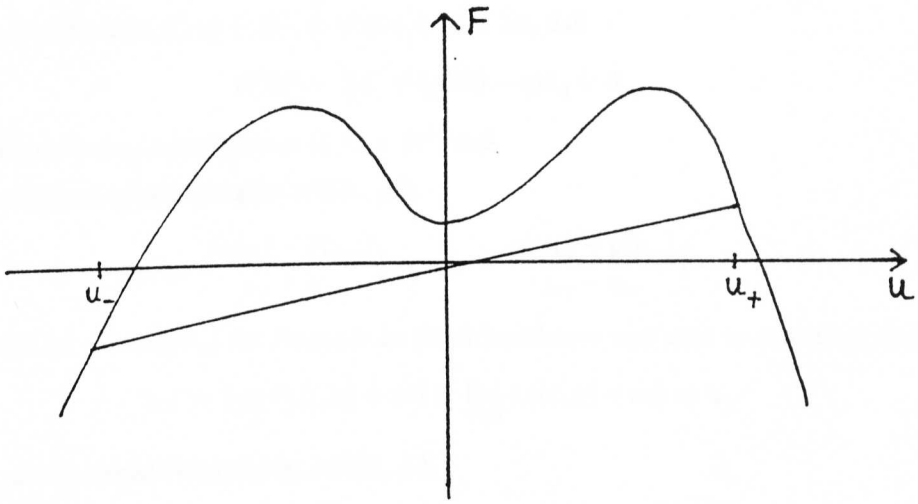


Abbildung 3.1

Es wird die eindimensionale Entropiebedingung in Normalenrichtung geprüft. Die soeben hergeleitete Formulierung der Entropiebedingung macht deutlich, wie wichtig die Linearkombinationen von f und g sind. Es wird sich zeigen, daß insbesondere die Anzahl der Wendestellen der Linearkombinationen die Komplexität der Lösung beeinflußt.

Schließlich muß $\tilde{u}$ so konstruiert werden, daß u die Anfangsdaten (2) annimmt.
Sei $x > 0$ und $y > 0$. Es gilt

$$u_1 = u(0, x, y) = \lim_{t \searrow 0} u(t, x, y) = \lim_{t \searrow 0} \tilde{u}(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{\substack{\zeta^2 + \eta^2 \to \infty \\ \frac{\zeta}{\eta} = const}} \tilde{u}(\zeta, \eta) = u_1 \text{ mit } \zeta > 0 \text{ und } \eta > 0 \quad .$$

Da u_0 in einer Umgebung von (x,y) konstant ist, und die Anfangsdaten dem Prinzip der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit gehorchen, existiert $\lim\limits_{t\searrow 0} u(t,x,y)$. Analoges gilt für die anderen Quadranten. Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{\substack{\zeta^2+\eta^2\to\infty \\ \frac{\zeta}{\eta}=const}} \tilde{u}(\zeta,\eta) = \begin{cases} u_1, & \text{falls } \zeta > 0 \text{ und } \eta > 0 \\ u_2, & \text{falls } \zeta < 0 \text{ und } \eta > 0 \\ u_3, & \text{falls } \zeta < 0 \text{ und } \eta < 0 \\ u_4, & \text{falls } \zeta > 0 \text{ und } \eta < 0 \end{cases} .$$

Damit ergibt sich folgendes Theorem:

3.3 Theorem

Sei $\tilde{u} : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ stückweise glatt und gilt

1.) in allen Punkten $(\zeta,\eta) \in I\!R^2$, in denen $\tilde{u}$ glatt ist, daß

$$(f'(\tilde{u}) - \zeta)\tilde{u}_\zeta + (g'(\tilde{u}) - \eta)\tilde{u}_\eta = 0 \quad ,$$

2.) in allen Sprungunstetigkeiten $(\zeta,\eta) \in I\!R^2$, daß

a) die Sprungbedingung ist erfüllt, d.h.

$$n_\zeta(\zeta - \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}) + n_\eta(\eta - \frac{g(u_+) - g(u_-)}{u_+ - u_-}) = 0 \quad ;$$

dabei sei $n = (n_\zeta, n_\eta)$ die Normale an die Schockkurve und zwar so orientiert, daß

$$u_+ := \lim_{\epsilon\searrow 0} \tilde{u}\left((\zeta,\eta) + \epsilon n\right) > \lim_{\epsilon\searrow 0} \tilde{u}\left((\zeta,\eta) - \epsilon n\right) =: u_-$$

b) die Entropiebedingung ist erfüllt, d.h.

$$\frac{F(k) - F(u_-)}{k - u_-} \geq \frac{F(u_+) - F(u_-)}{u_+ - u_-}$$

für alle $k \in [u_-, u_+]$; dabei sei $F := n_\zeta f + n_\eta g$,

3.)

$$\lim_{\substack{\zeta^2+\eta^2\to\infty \\ \frac{\zeta}{\eta}=const}} \tilde{u}(\zeta,\eta) = \begin{cases} u_1, & \text{falls } \zeta > 0 \text{ und } \eta > 0 \\ u_2, & \text{falls } \zeta < 0 \text{ und } \eta > 0 \\ u_3, & \text{falls } \zeta < 0 \text{ und } \eta < 0 \\ u_4, & \text{falls } \zeta > 0 \text{ und } \eta < 0 \end{cases} ,$$

dann ist $u : I\!R^+ \times I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definiert durch

$$u(t,x,y) := \tilde{u}(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}) \qquad \text{für } t > 0$$

$$\text{und} \qquad u(0,x,y) := \begin{cases} u_1, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y > 0 \\ u_2, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y > 0 \\ u_3, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ u_4, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y < 0 \end{cases} \qquad \text{für t=0}$$

die Entropielösung zu der Gleichung

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \tag{1}$$

mit den zugehörigen Riemannanfangsdaten (2).

Umgekehrt gilt für jede stückweise glatte Entropielösung zu (1) mit Riemannanfangsdaten: Die Lösung ist selbstähnlich und für $\tilde{u}(\zeta,\eta) := u(c, c\zeta, c\eta)$ (mit $c > 0$ beliebig) gelten 1.)–4.) .

Mein Ziel ist es die Funktion $\tilde{u}$ zu konstruieren. Dazu betrachte ich zunächst die Charakteristiken der Gleichung

$$(f'(\tilde{u}) - \zeta)\tilde{u}_\zeta + (g'(\tilde{u}) - \eta)\tilde{u}_\eta = 0 \quad , \tag{$***$}$$

um das Verhalten von $\tilde{u}$ in den "glatten Bereichen" zu studieren.

3.4 Definition(Charakteristik)

Sei $\tilde{u}$ in der offenen Menge $V \subset I\!R^2$ glatt. Eine Kurve $(x,y) : I \longrightarrow V$ ($I \subset I\!R$ ein Intervall) heißt Charakteristik, falls

$$\frac{d}{ds}x(s) = f'(\tilde{u}(x(s),y(s))) - x(s)$$
$$\frac{d}{ds}y(s) = g'(\tilde{u}(x(s),y(s))) - y(s)$$

3.5 Bemerkung

i) Eine Lösung $\tilde{u}$ von $(***)$ ist auf Charakteristiken konstant und der Bildbereich der Charakteristik ist Teilmenge einer Geraden durch den Punkt $(f'(\bar{u}), g'(\bar{u}))$, falls $\tilde{u}(x,y) \equiv \bar{u}$ auf der Charakteristik.

ii) Sei $w \in C^1(V)$ ($V \subset I\!R^2$ sei ein Gebiet). Ist w auf Charakteristiken konstant, so erfüllt w die Differentialgleichung $(***)$ stark.

Beweis:

i) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\tilde{u}(x(s),y(s)) &= \tilde{u}_\zeta \frac{dx}{ds} + \tilde{u}_\eta \frac{dy}{ds} \\ &= \tilde{u}_\zeta(f'(\tilde{u}) - x) + \tilde{u}_\eta(g'(\tilde{u}) - y) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{u}(x(s),y(s)) = \bar{u} \qquad \text{für ein } \bar{u} \in I\!R \quad .$$

Sei $(x_0, y_0) = (x(s_0), y(s_0))$ mit $s_0 \in I$, dann folgt:

$$(+) \qquad \begin{aligned} x(s) &= (x_0 - f'(\bar{u}))e^{s_0 - s} + f'(\bar{u}) \\ y(s) &= (y_0 - g'(\bar{u}))e^{s_0 - s} + g'(\bar{u}) \end{aligned}$$

Sei ohne Einschränkung $x_0 \neq g'(\bar{u})$, dann gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(y_0 - g'(\bar{u}))e^{s_0 - s}}{-(x_0 - f'(\bar{u}))e^{s_0 - s}} = \frac{y_0 - g'(\bar{u})}{x_0 - f'(\bar{u})} = const \quad .$$

Daraus folgt, daß die Charakteristik Teilmenge einer Geraden ist. Aus (+) folgt, daß die Gerade durch den Punkt $(f'(\bar{u}), g'(\bar{u}))$ geht.

ii) Dies folgt sofort aus der Definition der Charakteristiken.

q.e.d.

3.6 Definition (Basiskurve)

Die durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ w &\longmapsto (f'(w), g'(w)) \end{aligned}$$

definierte Kurve heißt Basiskurve der Gleichung $u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0$.

Ich bestimme die Lösung unter anderem mit Hilfe der Charakteristiken. Die Bemerkung 3.5 zeigt, wie wichtig die Basiskurve bei diesen Betrachtungen ist.

Kapitel 4

Methoden der Konstruktion und einfache Fälle

Im folgenden sei stets $f'' > 0$, $g'' > 0$ und $f, g \in C^4(\mathbb{R})$ vorausgesetzt. In diesem Kapitel will ich die fundamentalen Konstruktionsprinzipien herleiten. Wegen des Prinzips der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Anfangsdaten haben entlang der Achsen nur zwei Anfangswerte einen Einfluß auf die Gestalt der Lösung (für große $|x|$ bzw. $|y|$). Ich spalte das Problem außerhalb des Kegels

$$\mathcal{K} = \{(t,x,y)| \quad |(x,y)| > Nt\}$$

in vier eindimensionale Probleme auf (zur Definition von N siehe 2.3). Deshalb löse ich die Gleichung zunächst mit Anfangsdaten der Form

$$(*) \qquad u(0,x,y) = \begin{cases} w_1, & \text{für } y < 0 \\ w_2, & \text{für } y > 0 \end{cases}$$

Das folgende Lemma gibt die Lösung in diesem Fall an.

4.1 Lemma

Die Entropielösung zu der Gleichung

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0$$

mit den Anfangsdaten $(*)$ lautet

1.) für $w_2 \geq w_1$:

$$u(t,x,y) = \begin{cases} w_1 \ , & \text{für } y \leq tg'(w_1) \\ w \ , & \text{für } y = tg'(w) \text{ und } w_1 < w < w_2 \\ w_2 \ , & \text{für } y \geq tg'(w_2) \end{cases}$$

2.) für $w_2 < w_1$:

$$u(t,x,y) = \begin{cases} w_1 \ , & \text{für } y \leq t\dfrac{g(w_1) - g(w_2)}{w_1 - w_2} \\ w_2 \ , & \text{für } y > t\dfrac{g(w_1) - g(w_2)}{w_1 - w_2} \end{cases}$$

Beweis:

Wegen der speziellen Wahl der Anfangsdaten reduziert sich das Problem auf

$$u_t + g(u)_y = 0$$

$$u(0,y) = \begin{cases} w_1, & \text{für } y < 0 \\ w_2, & \text{für } y > 0 \end{cases} .$$

In diesem eindimensionalen Fall sind die Lösungen bekannt (Smoller , [9]) . Im Fall $w_2 > w_1$ ergibt sich eine eindimensionale Verdünnungswelle. Wegen der Voraussetzung $g'' > 0$ ist u aus 1.) wohldefiniert. Falls $w_2 < w_1$ ist, ist die Schockgeschwindigkeit so gewählt, daß die Sprungbedingung erfüllt ist. Die Entropiebedingung folgt aus der Konvexität von g.

q.e.d.

Zum Zeitpunkt $t = 1$ haben die in 4.1 konstruierten Lösungen folgende Gestalt

1.) für $w_2 > w_1$ siehe Abbildung 4.1 ,

2.) für $w_2 < w_1$ siehe Abbildung 4.2 .

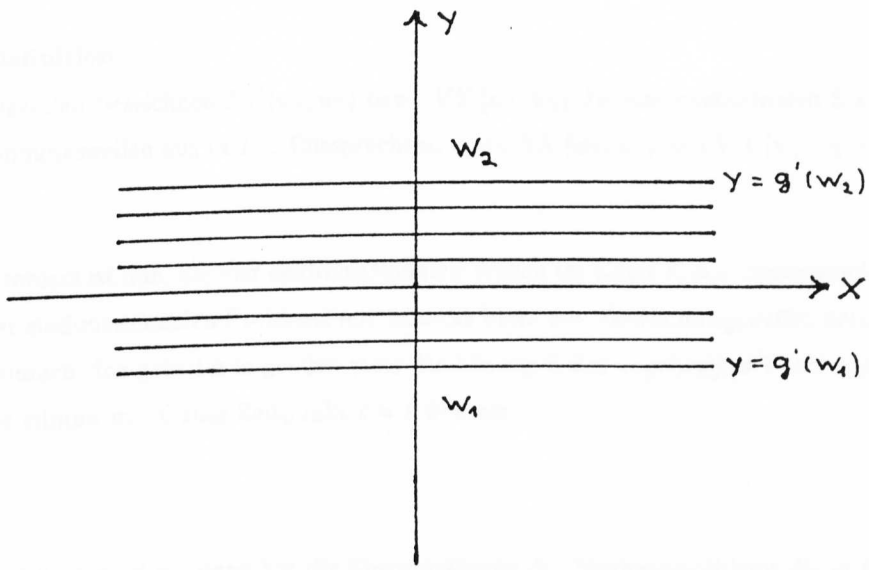


Abbildung 4.1: $w_2 > w_1$ **für** $t = 1$

Es gilt $\tilde{u}(\zeta,\eta) = u(1,\zeta,\eta)$. Im Fall $w_1 < w_2$ sind die eingezeichneten Geraden die Charakteristiken von $\tilde{u}$ bzgl. der Gleichung

$$(f'(\tilde{u}) - \zeta)\tilde{u}_\zeta + (g'(\tilde{u}) - \eta)\tilde{u}_\eta = 0 \qquad \text{(siehe 3.3-3.5)} .$$

Analog kann die Erhaltungsgleichung mit den Anfangsdaten

$$u(0,x,y) = \begin{cases} w_1, & \text{für } x < 0 \\ w_2, & \text{für } x > 0 \end{cases} \qquad \text{gelöst werden.}$$

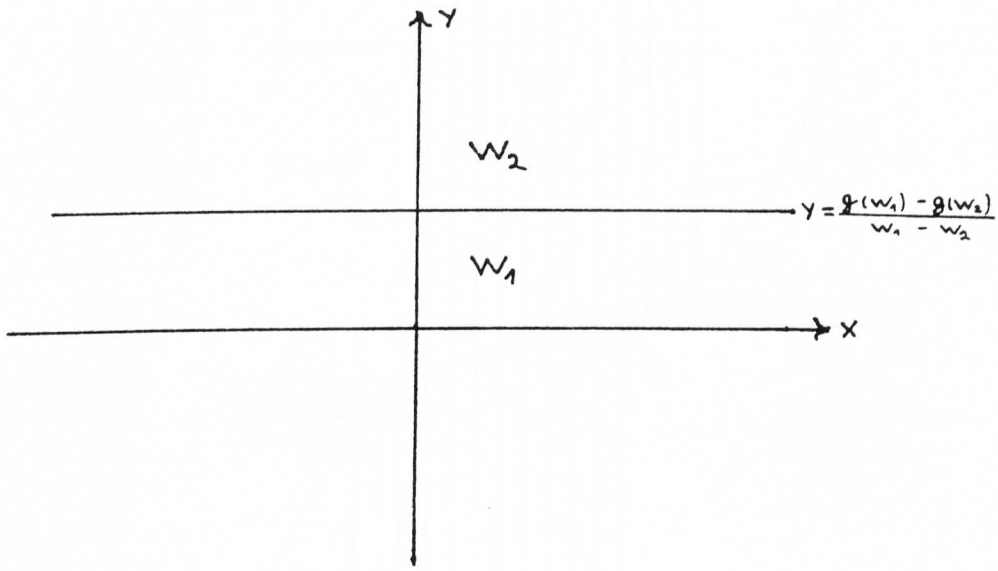


Abbildung 4.2: $w_2 < w_1$ **für** $t = 1$

4.2 Definition

Im folgenden bezeichnen $SY[w_1, w_2]$ bzw. $VY[w_1, w_2]$ die eindimensionalen Schock- bzw. Verdünnungswellen aus (4.1) . Entsprechend seien $SX[w_1, w_2]$ und $VX[w_1, w_2]$ definiert.

Das Problem ist nun, die vier eindimensionalen Wellen im Kegel $\mathcal{K}$ zusammenzusetzen. Falls die vier eindimensionalen Probleme nur Schocks bzw. nur Verdünnungswellen liefern ist dies noch einfach. Ich gebe im folgenden stets die Lösung $\tilde{u}$ des zugehörigen Problems aus (3.3) an. Sie stimmt mit u zum Zeitpunkt $t = 1$ überein.

4.3

Sei $u_3 < u_2 < u_4 < u_1$, dann hat die Entropielösung des Riemannproblems die in Abbildung 4.3 skizzierte Gestalt. Dabei sei $P_i := (f'(u_i), g'(u_i))$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

Beweis:

Die Gestalt der Lösung für Punkte (x, y) mit $x^2 + y^2$ groß ergibt sich aus dem oben Gesagten. Es gilt

$$\frac{d}{dw}\mathcal{B}(w) = (f''(w), g''(w)) \quad .$$

Da $f'' > 0$ und $g'' > 0$ sind, ist die Basiskurve streng monoton steigend. Außerdem treffen sich nach (3.5) zwei Charakteristiken mit dem gleichen Wert von u (sei $u \equiv \tilde{u}$) im Punkt $(f'(\tilde{u}), g'(\tilde{u}))$. Daraus folgt die angegebene Anordnung der Charakteristiken. Da sich die in 4.3 skizzierte Funktion aus Bereichen zusammensetzt, in denen sie aus Charakteristiken besteht und aus Bereichen in denen sie konstant ist, ergibt sich aus (3.3), daß sie

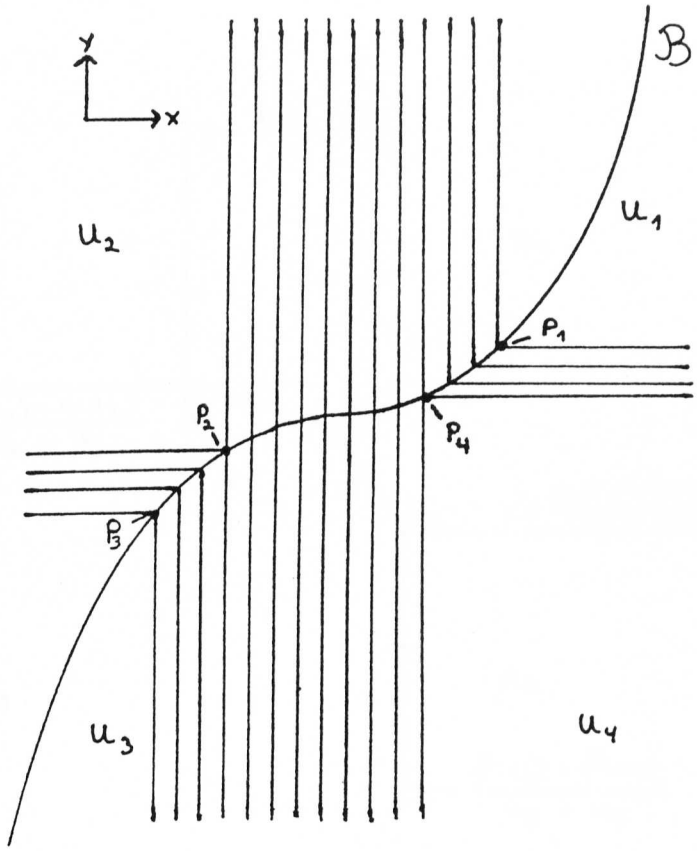


Abbildung 4.3: $u_3 < u_2 < u_4 < u_1$

die gesuchte Entropielösung ist. Die angegebene Funktion ist an den Übergängen zwischen Verdünnungswellen und konstanten Bereichen stetig, aber im allgemeinen nicht differenzierbar. Dies lassen sowohl die schwache Formulierung der Erhaltungsgleichung als auch die Entropiebedingung zu (siehe Sprung- und Entropiebedingung aus 2.6 bzw. 2.7 für $u_- = u_+$).

q.e.d.

BEMERKUNG:

Analog läßt sich der Fall $u_3 < u_4 < u_2 < u_1$ behandeln. Dieser Fall kann aber auch durch Transformation auf den in (4.3) behandelten Fall zurückgeführt werden. Ich gebe in diesem Kapitel lediglich qualitativ verschiedenen Fälle an. Auf mögliche Transformationen gehe ich in Kapitel 6 ein.

4.4

Sei $u_1 < u_2 < u_4 < u_3$. Dann hat die Entropielösung die in Abbildung 4.4 skizzierte Gestalt.

Dabei seien $P_1 = (\frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2}, \frac{g(u_2) - g(u_3)}{u_2 - u_3}), P_2 = (\frac{f(u_3) - f(u_4)}{u_3 - u_4}, \frac{g(u_1) - g(u_4)}{u_1 - u_4})$ und $P_3 = (\frac{f(u_1) - f(u_3)}{u_1 - u_3}, \frac{g(u_1) - g(u_3)}{u_1 - u_3})$.

Beweis:

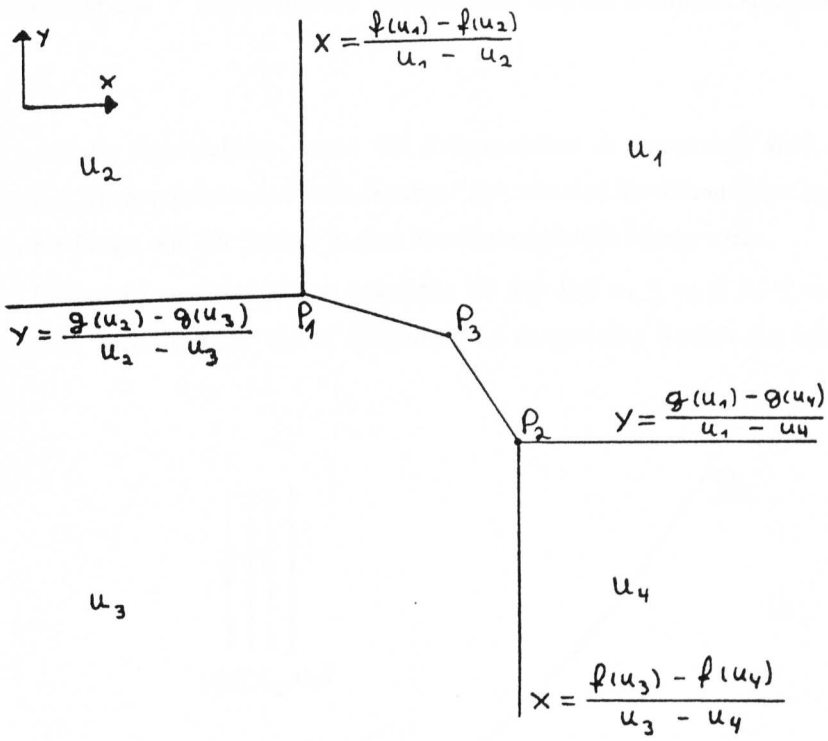


Abbildung 4.4: $u_1 < u_2 < u_4 < u_3$ **für** $t = 1$

Aus der Konstruktion von $SY[u_3, u_2]$ und $SX[u_2, u_1]$ folgt, daß sie sich im Punkt $P_1 = (\frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2}, \frac{g(u_2) - g(u_3)}{u_2 - u_3})$ schneiden. Analog gilt, daß sich die Schocks $SX[u_3, u_4]$ und $SY[u_4, u_1]$ im Punkt $P_2 = (\frac{f(u_3) - f(u_4)}{u_3 - u_4}, \frac{g(u_1) - g(u_4)}{u_1 - u_4})$ schneiden. Die Lage der Punkte P_1 und P_2 zueinander folgt aus der Konvexität von f und g und der Anordnung der Punkte $u_1, .., u_4$. Es gilt nämlich

$$\frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} < f'(u_2) < f'(u_4) < \frac{f(u_3) - f(u_4)}{u_3 - u_4} \qquad \text{und}$$

$$\frac{g(u_1) - g(u_4)}{u_1 - u_4} < \frac{g(u_2) - g(u_4)}{u_2 - u_4} < \frac{g(u_2) - g(u_3)}{u_2 - u_3} \quad .$$

Von P_1 und P_2 lösen sich Schocks zwischen u_1 und u_3 ab. Damit sie die Sprungbedingung erfüllen, sind sie so konstruiert, daß sie Teil einer Geraden sind, die durch den Punkt $(\frac{f(u_1) - f(u_3)}{u_1 - u_3}, \frac{g(u_1) - g(u_3)}{u_1 - u_3})$ geht. Die Lage des Punktes P_3 zu P_1 und P_2 ergibt sich mit analogen Argumenten wie oben. Jetzt muß nur noch die Entropiebedingung nachgeprüft werden. Die Schocks $SX[u_2, u_1], SY[u_3, u_2], SX[u_3, u_4]$ und $SY[u_4, u_1]$ erfüllen sie nach Konstruktion (siehe 4.1). Es bleibt die Entropiebedingung für die Schocks zwischen u_1 und u_3 nachzuweisen. Es gilt jeweils, daß die Normale an den Schock (in Richtung u_3) zwei negative Komponenten hat. Sei F wie in Theorem 3.3, dann gilt

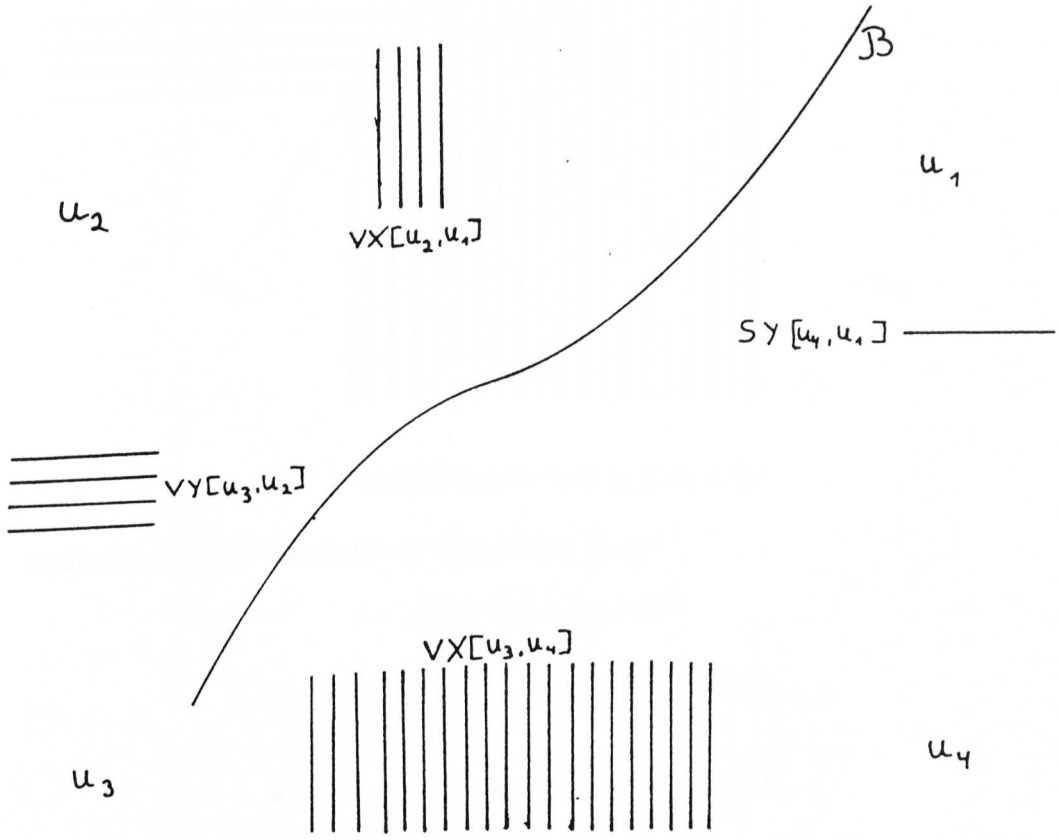
$$F'' = n_x f'' + n_y g'' < 0 \quad .$$

Aus der Konkavität von F folgt dann aus Theorem 3.3, daß die Entropiebedingung erfüllt ist.

q.e.d.

Schwieriger wird die Konstruktion, wenn die Anfangsdaten so angeordnet sind, daß die eindimensionalen Riemannprobleme "weit draußen" Schocks und Verdünnungswellen liefern. Es stellt sich die Frage, wie ein Schock in eine Verdünnungswelle hinein wirkt.

Um dieses Phänomen zu untersuchen, betrachte ich den Fall $u_3 \leq u_2 \leq u_1 < u_4$. Diese Anordnung liefert "weit draußen" die in Abbildung 4.5 dargestellte Gestalt der Lösung.



Abbbildung 4.5: $u_3 \leq u_2 \leq u_1 < u_4$

Wie lassen sich jetzt diese eindimensionalen Wellen zusammensetzen? Zunächst setze ich die Charakteristiken mit Werten $u \leq u_1$ bis zur Basiskurve fort. Im Punkte $(f'(u_4), \frac{g(u_1) - g(u_4)}{u_1 - u_4})$ trifft der Schock $SY[u_4, u_1]$ auf die Verdünnungswelle $VX[u_3, u_4]$. Jetzt bin ich in der in Abbildung 4.6 skizzierten Situation.

Die Idee ist nun, die Schockkurve so in die Verdünnugswelle hinein fortzusetzen, daß die Sprungbedingung erfüllt bleibt. Es bietet sich an, die Schockkurve mit den Werten von u auf den Charakteristiken der Verdünnungswelle $VX[u_3, u_4]$ zu parametrisieren. Damit

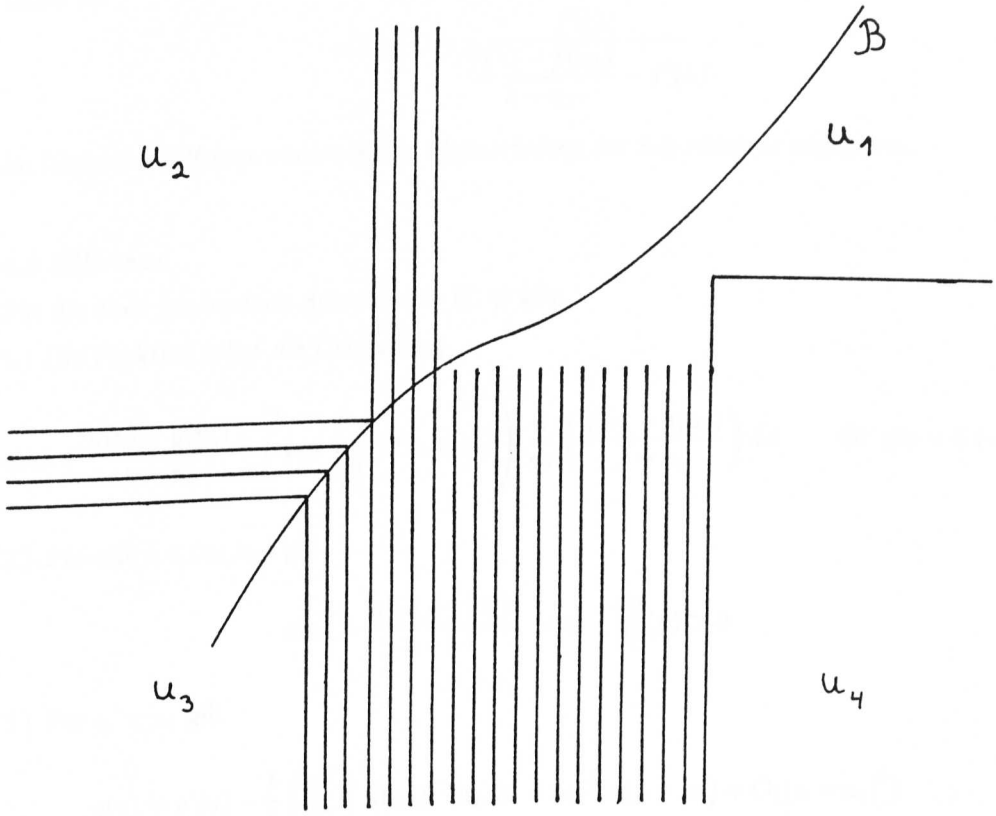


Abbildung 4.6: $u_3 \leq u_2 \leq u_1 < u_4$

ergibt sich folgender Ansatz für die Schockkurve (ζ, η) :

$$(\zeta, \eta) : (u_1, u_4] \longrightarrow I\!R^2$$

$$(*) \qquad n_\zeta(\zeta - \frac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}) + n_\eta(\eta - \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}) = 0$$

$$\text{mit } \zeta(u) := f'(u) \text{ und } \eta(u_4) = \frac{g(u_1) - g(u_4)}{u_1 - u_4} \quad .$$

Die Gleichung $(*)$ ist die Sprungbedingung aus Theorem 3.3 . Eine Normale an die Schockkurve ist $n = (\eta', -\zeta')$. Damit ergibt sich

$$(**) \qquad \frac{d\eta}{d\zeta}(u) = \frac{\eta'}{\zeta'}(u) = \frac{\eta(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\zeta(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \quad .$$

Dies ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung für η. Sie kann mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden. Für alle $u \in (u_1, u_4]$ ergibt sich:

(+)

$$\eta(u) = \int_{u_4}^{u} exp\left(\int_{s}^{u} -a(\lambda, u_1)d\lambda\right) \frac{g(s) - g(u_1)}{s - u_1} a(s, u_1)ds + \frac{g(u_1) - g(u_4)}{u_1 - u_4} exp\left(\int_{u_4}^{u} -a(\lambda, u_1)d\lambda\right)$$

Dabei sei

$$a(\lambda, u_1) := \frac{f''(\lambda)}{\dfrac{f(\lambda) - f(u_1)}{\lambda - u_1} - f'(\lambda)}$$

Im folgenden Hilfssatz werden einige Eigenschaften der Schockkurve angegeben.

4.5 Hilfssatz

Für die oben konstruierte Schockkurve (ζ, η) gilt:

1.) Die Funktion η hat die Darstellung

$$\eta(u) = \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} + \int_u^{u_4} exp\left(\int_u^s a(\lambda, u_1) d\lambda\right) \frac{d}{ds}\left(\frac{g(s) - g(u_1)}{s - u_1}\right) ds \qquad \text{für alle } u \in (u_1, u_4].$$

2.) Für alle $u \in (u_1, u_4)$ gilt

$$\eta(u) > \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{d\zeta}(u) > 0 \quad .$$

3.) Für $u \searrow u_1$ gilt

$$\eta(u) = g'(u) - \frac{1}{3}\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u_1) f''(u_1)(u - u_1)^2 ln(u - u_1) + \mathcal{O}((u - u_1)^2) \quad .$$

4.) Es ist

$$\lim_{u \searrow u_1} \eta(u) = g'(u_1) \text{ und } \lim_{u \searrow u_1} \frac{d\eta}{d\zeta}(u) = \frac{g''(u_1)}{f''(u_1)} \quad .$$

5.) Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}(u) = \frac{\dfrac{1}{f''(u)} \dfrac{1}{u - u_1} (\eta(u) - g'(u))}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \quad .$$

Die damit konstruierte Funktion ist in Abbildung 4.7 skizziert. Da (ζ, η) die Sprungbedingung erfüllt, ist damit eine schwache Lösung konstruiert. Es ist noch zu prüfen, ob auch die Entropiebedingung erfüllt ist.

4.6 Bemerkung

Aus (4.5.4) ergibt sich, daß die Schockkurve die Basiskurve im Punkt $(f'(u_1), g'(u_1))$ mit erster Ordnung berührt. Da $f'' > 0$ ist, folgt aus (4.5.5)

$$\eta(u) < g'(u) \Longrightarrow \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}(u) < 0, \text{ d.h. die Schockkurve ist konkav.}$$

$$\eta(u) > g'(u) \Longrightarrow \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}(u) > 0, \text{ d.h. die Schockkurve ist konvex.}$$

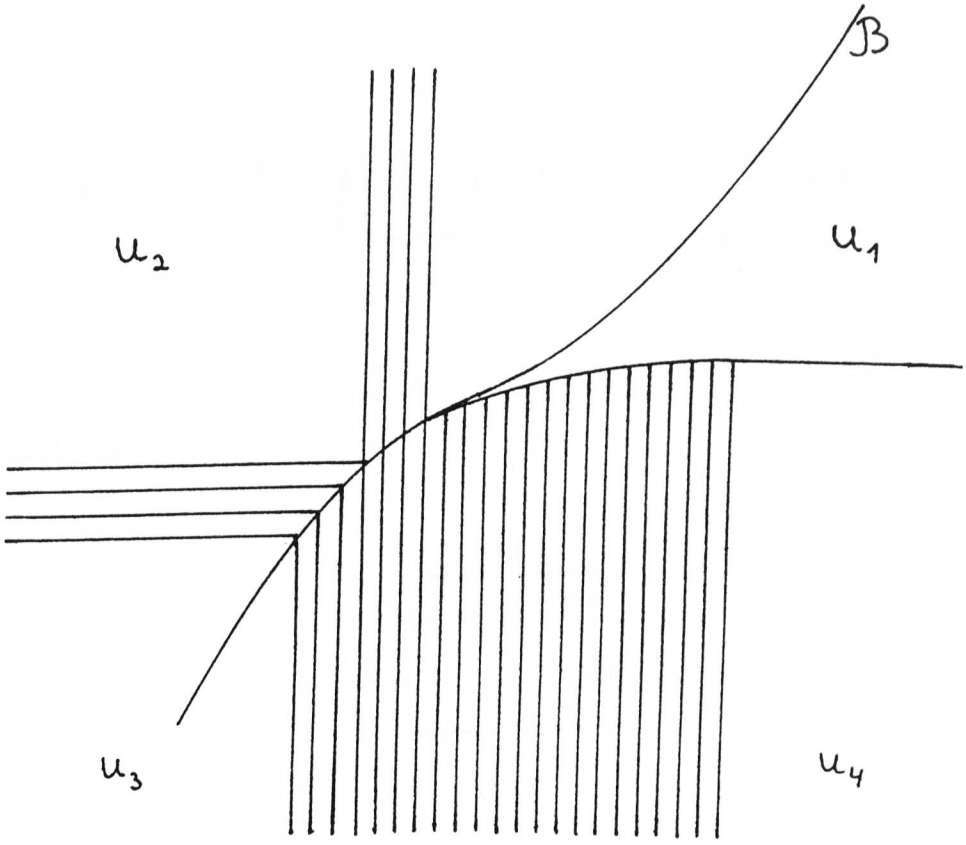


Abbildung 4.7: $u_3 \leq u_2 \leq u_1 < u_4$

Solange die Schockkurve unterhalb der Basiskurve liegt, ist sie konkav gekrümmt und wenn sie oberhalb der Basiskurve liegt ist sie konvex gekrümmt.

Beweis von Hilfssatz 4.5:

1.) Aus (+) folgt:

$$\eta(u) = exp\left(\int_{u_4}^{u} -a(\lambda, u_1)d\lambda\right)\left[\frac{g(u_1)-g(u_4)}{u_1-u_4} + \int_{u_4}^{u} exp\left(\int_{u_4}^{s} a(\lambda, u_1)d\lambda\right)\frac{g(s)-g(u_1)}{s-u_1}a(s,u_1)ds\right]$$

Mittels partieller Integration ergibt sich

$$\eta(u) = exp\left(\int_{u_4}^{u} -a(\lambda, u_1)d\lambda\right)\left[exp\left(\int_{u_4}^{u} a(\lambda, u_1)d\lambda\right)\frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1} - \right.$$

$$\left. - \int_{u_4}^{u} exp\left(\int_{u_4}^{s} a(\lambda, u_1)d\lambda\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{g(s)-g(u_1)}{s-u_1}\right)ds\right]$$

$$= \frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1} + \int_{u}^{u_4} exp\left(\int_{u}^{s} a(\lambda, u_1)d\lambda\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{g(s)-g(u_1)}{s-u_1}\right)ds \quad .$$

2.) Aus 1.) folgt:

$$\eta(u) - \frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1} = \int_u^{u_1} \underbrace{exp\left(\int_u^s a(\lambda,u_1)d\lambda\right)}_{>0} \underbrace{\frac{d}{ds}\left(\frac{g(s)-g(u_1)}{s-u_1}\right)}_{\substack{>0 \\ \text{da } g''>0}} ds \quad > \quad 0$$

Damit folgt:

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(u) = \frac{\overbrace{\eta(u) - \frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}^{>0}}{\underbrace{f'(u) - \frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}_{>0}} > 0 \quad .$$

3.) Diese Darstellung von η zeigten Chang und Zheng in [2]. Man kommt auf diese Form, indem man in der in 1.) hergeleiteten Darstellung von η die auftauchenden Ausdrücke durch ihre Taylorentwicklung um u_1 darstellt und dann aufintegriert.

4.) Aus 3.) folgt unmittelbar, daß $\lim\limits_{u \searrow u_1} \eta(u) = g'(u_1)$ ist. Setzt man die Darstellung von η aus 3.) in die Differentialgleichung (**) ein, so ergibt sich:

$$\lim_{u \searrow u_1} \frac{d\eta}{d\zeta}(u) = \lim_{u \searrow u_1} \frac{\eta(u) - \frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{\zeta(u) - \frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}$$

$$= \lim_{u \searrow u_1} \left(\underbrace{\frac{g'(u) - \frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}}_{\longrightarrow \frac{g''(u_1)}{f''(u_1)}} + \underbrace{C\frac{(u-u_1)^2 ln(u-u_1) + \mathcal{O}((u-u_1)^2)}{f'(u) - \frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}}_{\longrightarrow 0} \right)$$

$$= \frac{g''(u_1)}{f''(u_1)} \quad .$$

5.) Es gilt:

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}(u) = \frac{d}{du}\left(\frac{d\eta}{d\zeta}(u)\right)\cdot\frac{du}{d\eta} = \frac{d}{du}\left(f'(u)\frac{\eta(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}\right)\cdot\frac{1}{f''(u)}$$

$$= \frac{1}{f''}\frac{1}{(f'-\Delta f)^2}\left(\left(\eta' - \frac{g'-\Delta g}{u-u_1}\right)(f'-\Delta f) - \left(f'' - \frac{f'-\Delta f}{u-u_1}\right)(\eta - \Delta g)\right)$$

$$= \frac{1}{f''}\frac{1}{(f'-\Delta f)^2}\left(\left(f''\frac{\eta-\Delta g}{f'-\Delta f} - \frac{g'-\Delta g}{u-u_1}\right)(f'-\Delta f) - \left(f'' - \frac{f'-\Delta f}{u-u_1}\right)(\eta - \Delta g)\right)$$

$$= \frac{1}{f''}\frac{\dfrac{1}{u-u_1}}{(f'-\Delta f)^2}\left(-(g'-\Delta g)(f'-\Delta f) + (f'-\Delta f)(\eta - \Delta g)\right)$$

$$= \frac{1}{f''(u)}\frac{\dfrac{1}{u-u_1}}{\left(f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}\right)}(\eta(u) - g'(u))$$

Dabei seien

$$\Delta f := \frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1} \quad \text{und} \quad \Delta g := \frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1} \quad .$$

Falls in den obigen Berechnungen das Argument weggelassen wurde, ist stets u das Argument.

q.e.d.

Jetzt untersuche ich, ob die Entropiebedingung für die Schockkurve erfüllt ist. Es zeigt sich, daß die Entropiebedingung nicht für jede Wahl der u_i's mit $u_3 \leq u_2 \leq u_1 < u_4$ gilt. Zunächst zeige ich, daß die Entropiebedingung in einer Umgebung des Punktes $(f'(u_4), \dfrac{g(u_1)-g(u_4)}{u_1-u_4})$ erfüllt ist.

4.7 Lemma

Zu jedem $u_4 > u_1$ gibt es ein $\bar{u}(u_4) \in [u_1, u_4)$, so daß die Entropiebedingung für $u \in [\bar{u}, u_4]$ erfüllt ist.

Beweis:

Die Entropiebedingung lautet

$$n_\zeta\frac{f(v)-f(u_1)}{v-u_1} + n_\eta\frac{g(v)-g(u_1)}{v-u_1} \geq n_\zeta\frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1} + n_\eta\frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}$$

für alle $v \in [u_1, u]$. Dabei muß $n = (n_\varsigma, n_\eta)$ von u_1 nach u zeigen. Mit $n = \left(\frac{\eta'}{\varsigma'}(u), -1\right) = \left(\frac{d\eta}{d\varsigma}(u), -1\right)$ ist das gewährleistet. Es ergibt sich

$$\frac{d\eta}{d\varsigma}(u)\frac{f(v)-f(u_1)}{v-u_1} - \frac{g(v)-g(u_1)}{v-u_1} \geq \frac{d\eta}{d\varsigma}(u)\frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1} - \frac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}$$

für alle $v \in [u_1, u]$. Das ist äquivalent zu

$$(*) \qquad \frac{d\eta}{d\varsigma}(u) \leq \frac{\dfrac{g(v)-g(u_1)}{v-u_1} - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{\dfrac{f(v)-f(u_1)}{v-u_1} - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}} =: G(u,v) \text{ für alle } v \in [u_1, u] \quad .$$

G sei dabei folgendermaßen stetig fortgesetzt

$$G(u,u) = \frac{g'(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}} \quad \text{und} \quad G(u_1,u_1) = \frac{g''(u_1)}{f''(u_1)} \quad .$$

Da $f'' > 0$ und $g'' > 0$ sind, gilt $G(u,v) > 0$ für alle $u, v \in I\!R$. Also nimmt G ein positives Minimum δ auf der kompakten Menge

$$\{(u,v)| \text{ mit } u_1 \leq u \leq u_4 \text{ und } u_1 \leq v \leq u\} \text{ an.}$$

Da $\frac{d\eta}{d\varsigma}(u_4) = 0$ ist, gibt es ein $\bar{u} \in [u_1, u_4)$, so daß

$$\frac{d\eta}{d\varsigma}(u) \leq \delta \leq G(u,v) \text{ für alle } v \in [u_1, u] \text{ und } u \in [\bar{u}, u_4] \quad .$$

Damit ist $(*)$ für alle $u \in [\bar{u}, u_4]$ gezeigt.

q.e.d.

Im folgenden leite ich notwendige Bedingungen für das Verletztsein der Entropiebedingung her. Es zeigt sich, daß drei qualitativ verschiedene Formen einer Entropiebedingung auftreten können. Die genauere Untersuchung dieser Formen liefert die Hilfsmittel zur Konstruktion der Entropielösung. Für die folgenden Betrachtungen benutze ich die Entropiebedingung in der Form

$$H(u,v) := \frac{F_n(v)-F_n(u_1)}{v-u_1} - \frac{F_n(u)-F_n(u_1)}{u-u_1} \geq 0 \text{ für alle } v \in [u_1, u] \quad .$$

Dabei ist $n(u) = (n_\varsigma(u), n_\eta(u))$ eine Normale an die Schockkurve im Punkte $(f'(u), \eta(u))$ und $F_n(v) := n_\varsigma(u)f(v) + n_\eta(u)g(v)$ (n zeige von u_1 nach u).

4.8 Lemma

Falls die Schockkurve (ζ, η) die Entropiebedingung nicht erfüllt, gibt es $\bar{u}, \bar{v} \in I\!R$ mit $u_4 > \bar{u} \geq \bar{v} \geq u_1$, so daß gilt:

Die Entropiebedingung ist in $[\bar{u}, u_4]$ erfüllt und

$$F_n'(\bar{v}) = \frac{F_n(\bar{u}) - F_n(u_1)}{\bar{u} - u_1} = \frac{F_n(\bar{v}) - F_n(u_1)}{\bar{v} - u_1} = \frac{F_n(\bar{v}) - F_n(\bar{u})}{\bar{v} - \bar{u}}.$$

BEMERKUNG

Die Abbildungen 4.8-4.10 skizzieren die sich aus Lemma 4.8 ergebende Situation.

1.) Für $\bar{v} = \bar{u}$ siehe Abbildung 4.8,

2.) Für $u_1 < \bar{v} < \bar{u}$ siehe Abbildung 4.9,

3.) Für $\bar{v} = u_1$ siehe Abbildung 4.10.

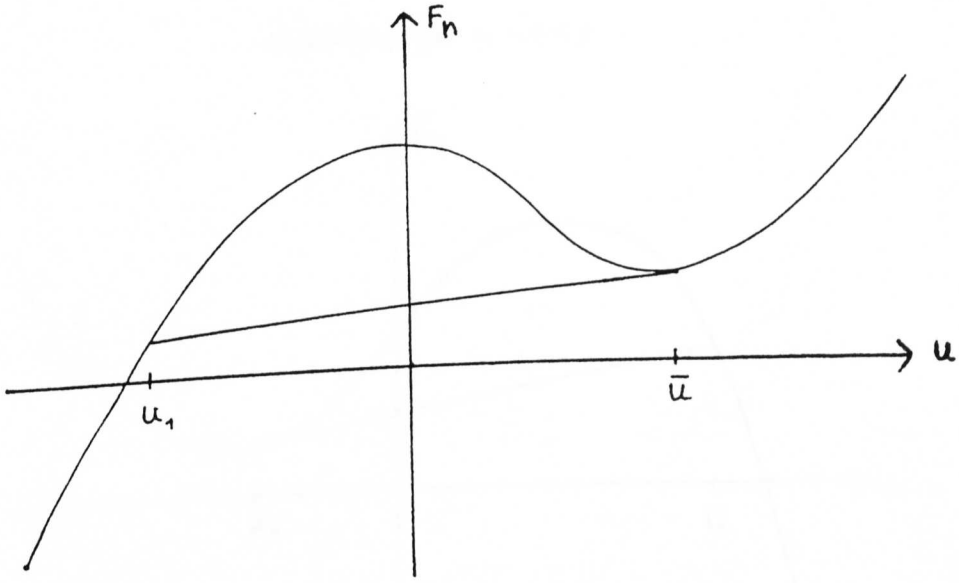


Abbildung 4.8: $\bar{v} = \bar{u}$

Beweis von Lemma 4.8:

Es sei

$$M := \{\, u \mid u_1 < u \leq u_4 \text{ und } \exists v \in [u_1, u] \text{ mit } H(u,v) < 0 \} \quad .$$

M ist die Menge aller Werte von u, für die die Entropiebedingung verletzt wird, also gilt nach Voraussetzung: $M \neq \emptyset$. Es sei $\bar{u} := sup\, M$. Aus Lemma 4.7 folgt, daß $\bar{u} < u_4$ ist.

Behauptung: In $\bar{u}$ ist die Entropiebedingung erfüllt.

Annahme: $H(\bar{u}, \tilde{v}) < 0$ für ein $\tilde{v} \in [u_1, \bar{u}]$.

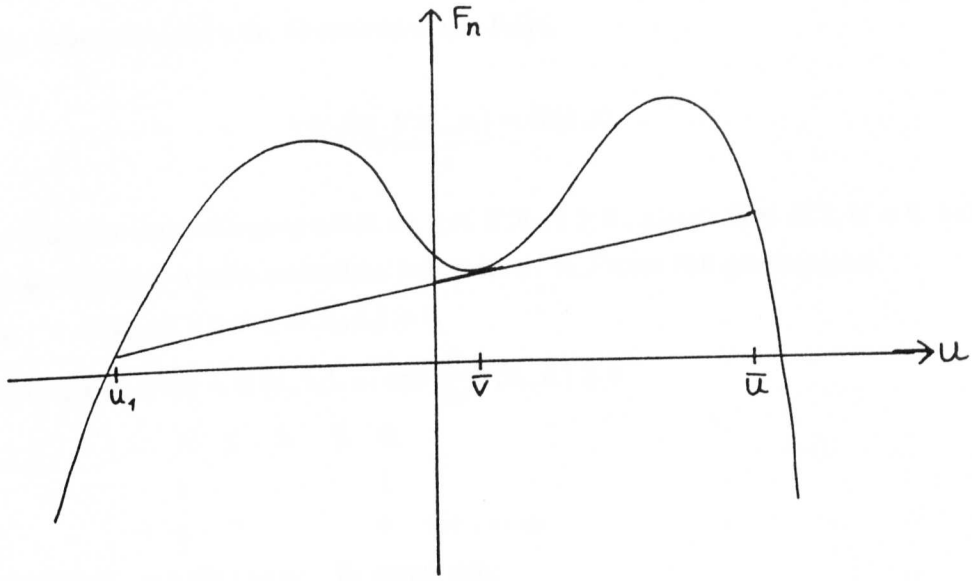


Abbildung 4.9: $u_1 < \bar{v} < \bar{u}$

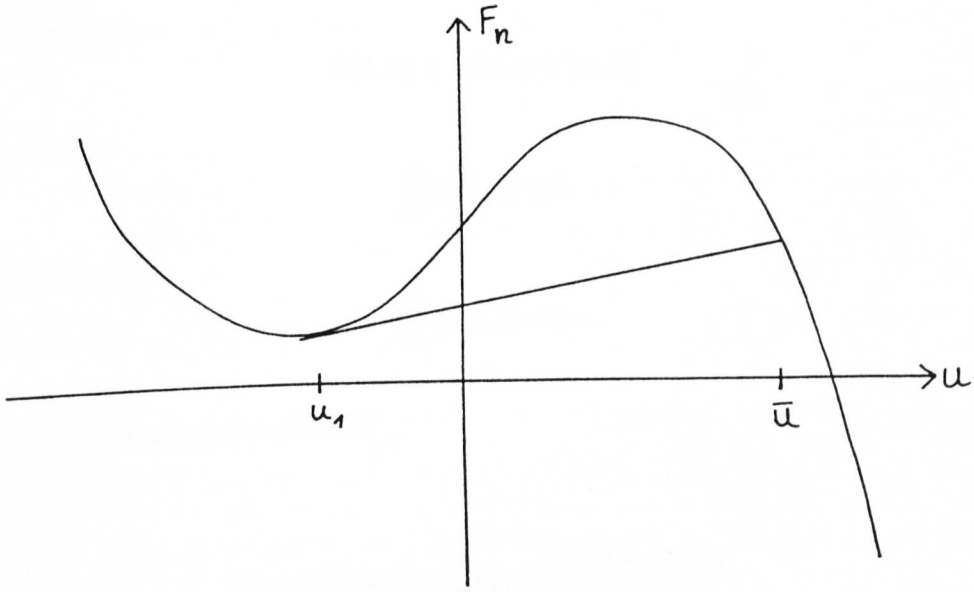


Abbildung 4.10: $\bar{v} = u_1$

Dann ist $H(u,v) < 0$ in einer Umgebung von $(\bar{u},\bar{v})$, im Widerspruch zur Definition von $\bar{u}$. Denn es würden $u \in M$ existieren mit $u > \bar{u}$.

i)Behauptung: Entweder gibt es ein $\bar{v} \in [u_1, \bar{u})$, so daß $H(\bar{u},\bar{v}) = 0$ oder es ist $\frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u},\bar{u}) = 0$.

Nach Definition von M und $\bar{u}$ existieren Folgen $(\bar{u}_i)_{i\in N} \subset M$ und $(v_i)_{i\in N}$ mit

$$\bar{u}_i \longrightarrow \bar{u} \quad , \quad H(\bar{u}_i, v_i) < 0 \quad \text{und} \quad \bar{u}_i \geq v_i \geq u_1 \quad .$$

Da $(v_i)_{i\in N} \subset [u_1, \bar{u}]$, gibt es eine Teilfolge, die konvergiert. Diese Folge sei wieder mit

$(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Sei $\bar{v}$ der Grenzwert dieser Folge.

Es gilt

$$0 \geq \lim_{i\to\infty} \underbrace{H(\bar{u}_i, v_i)}_{<0} = H(\bar{u}, \bar{v}) \quad .$$

Da in $\bar{u}$ die Entropiebedingung erfüllt ist, gilt $H(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$. Damit folgt $H(\bar{u}, \bar{v}) = 0$. Falls $\bar{v} = \bar{u}$ ist $H(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ keine zusätzliche Information. In diesem Fall gilt folgendes:

Es ist $\quad H(\bar{u}_i, v_i) < 0$ und $H(\bar{u}_i, \bar{u}_i) = 0$.

Da $v_i < \bar{u}_i$ gibt es ein $\tilde{v}_i \in (v_i, \bar{u}_i)$, so daß $\dfrac{\partial}{\partial v} H(\bar{u}_i, \tilde{v}_i) \geq 0$.

$$\begin{array}{ccccc} v_i & \leq & \tilde{v}_i & \leq & \bar{u}_i \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \bar{u} & & & & \bar{u} \quad \text{für } i \to \infty \quad . \end{array}$$

Damit folgt: $\tilde{v}_i \to \bar{u}$ für $i \to \infty$. Es ergibt sich:

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u}_i, \tilde{v}_i) = \frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u}, \bar{u})$$

Außerdem gilt

$$H(\bar{u}, w) \geq 0 \text{ für } w \in [u_1, \bar{u}] \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u}, \bar{u}) \leq 0 \quad .$$

Also insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u}, \bar{u}) = 0 \quad .$$

Aus der Behauptung i) ergibt sich

I) falls $\bar{v} = u_1$:

Es gilt

$$0 = H(\bar{u}, u_1) = F_n'(u_1) - \frac{F_n(\bar{u}) - F_n(u_1)}{\bar{u} - u_1} \quad .$$

Also folgt

$$F_n'(u_1) = \frac{F_n(\bar{u}) - F_n(u_1)}{\bar{u} - u_1} \quad .$$

II) falls $u_1 < \bar{v} < \bar{u}$:

Aus $H(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ folgt

$$\frac{F_n(\bar{u}) - F_n(u_1)}{\bar{u} - u_1} = \frac{F_n(\bar{v}) - F_n(u_1)}{\bar{v} - u_1} \quad .$$

Damit gilt auch

$$\frac{F_n(\bar{u}) - F_n(\bar{v})}{\bar{u} - \bar{v}} = \frac{F_n(\bar{u}) - F_n(u_1)}{\bar{u} - u_1} = \frac{F_n(\bar{v}) - F_n(u_1)}{\bar{v} - u_1} \quad .$$

Da $H(\bar{u},\bar{v}) = 0$ und $H(\bar{u},v) \geq 0$ (für $v \in [u_1,\bar{u}]$) folgt, daß $\frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u},\bar{v}) = 0$ ist.

$$\frac{\partial}{\partial v} H(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_n(v)-F_n(u_1)}{v-u_1} - \frac{F_n(u)-F_n(u_1)}{u-u_1}\right) = \frac{F_n'(v)}{v-u_1} - \frac{F_n(v)-F_n(u_1)}{(v-u_1)^2}$$

Daraus folgt

$$F_n'(\bar{v}) = \frac{F_n(\bar{v})-F_n(u_1)}{\bar{v}-u_1} \quad .$$

III) falls $\bar{v} = \bar{u}$:

Aus $\frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u},\bar{u}) = 0$ folgt

$$F_n'(\bar{u}) = \frac{F_n(\bar{u})-F_n(u_1)}{\bar{u}-u_1} \quad .$$

q.e.d.

4.9 Definition

Falls die Entropiebedingung für die Schockkurve (ζ,η) nicht erfüllt ist, heißt

$$\bar{u} := sup\{\, u \,|\, u_1 < u \leq u_4 \text{ und } \exists v \in [u_1,u] \text{ mit } H(u,v) < 0\}$$

kritischer Entropiewert. Weiterhin heißt der Punkt $(\zeta(\bar{u}),\eta(\bar{u}))$ *kritischer Entropiepunkt.* Wie eben gezeigt, existiert zu jedem $\bar{u}$ mindestens ein $\bar{v}$, so daß

$$F_n'(\bar{v}) = \frac{F_n(\bar{u})-F_n(u_1)}{\bar{u}-u_1} = \frac{F_n(\bar{v})-F_n(u_1)}{\bar{v}-u_1} = \frac{F_n(\bar{v})-F_n(\bar{u})}{\bar{v}-\bar{u}} \text{ mit } \bar{v} \in [u_1,\bar{u}].$$

Ein solcher Wert $\bar{v}$ heißt *tangentialer Wert* zum kritischen Entropiewert $\bar{u}$ bzgl (ζ,η).

In den folgenden Lemmata leite ich weitere Eigenschaften im kritischen Entropiepunkt her.

4.10 Lemma

Die Entropiebedingung sei für (ζ,η) verletzt mit einem tangentialen Wert $\bar{v} = \bar{u}$. Dann schneidet die Schockkurve in $\bar{u}$ die Basiskurve (d.h. $\eta(\bar{u}) = g'(\bar{u})$) und es gilt:

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{\eta(\bar{u}) - \frac{g(\bar{u})-g(u_1)}{\bar{u}-u_1}}{f'(\bar{u}) - \frac{f(\bar{u})-f(u_1)}{\bar{u}-u_1}} = \frac{g'(\bar{u}) - \frac{g(\bar{u})-g(u_1)}{\bar{u}-u_1}}{f'(\bar{u}) - \frac{f(\bar{u})-f(u_1)}{\bar{u}-u_1}} = \frac{g''}{f''}(\bar{u})$$

Beweis:

Aus Lemma 4.8 folgt:

$$F_n'(\bar{u}) = \frac{F_n(\bar{u}) - F_n(u_1)}{\bar{u} - u_1}$$

Im Punkt $(\zeta, \eta)(\bar{u})$ ist $\left(\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}), -1\right)$ eine (nicht notwendig normierte) Normale an den Schock, die von u_1 nach $\bar{u}$ zeigt. Es sei $F_{n(\bar{u})}(v) := \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u})f(v) - g(v)$. Dann folgt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}f'(\bar{u}) - g'(\bar{u}) = \frac{d\eta}{d\zeta}\left(\frac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}\right) - \frac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1} \quad .$$

Da $\bar{u} \neq u_1$ und f konvex ist, folgt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{g'(\bar{u}) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(\bar{u}) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} \quad .$$

Außerdem erfüllt (ζ, η) die Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{\eta(\bar{u}) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(\bar{u}) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} \quad .$$

Damit ergibt sich: $\eta(\bar{u}) = g'(\bar{u})$, das bedeutet, daß der Schock die Basiskurve schneidet. Außerdem sind damit die beiden ersten Identitäten im Lemma nachgewiesen.

i) *Behauptung:* $\frac{g''}{f''}(\bar{u}) \geq \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u})$.

Dazu zeige ich zunächst, daß

$$\eta(u) \leq g'(u) \text{ für alle } u \in [\bar{u}, u_4].$$

Aus der Entropiebedingung folgt $\frac{\partial}{\partial v}H(u,u) \leq 0$, also gilt

$$F_n'(u) \leq \frac{F_n(u) - F_n(u_1)}{u - u_1}.$$

Mit der Normalen $n = (\frac{d\eta}{d\zeta}(u), -1)$ folgt daraus

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(u)f'(u) - g'(u) \leq \frac{d\eta}{d\zeta}(u)\frac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1} - \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}.$$

Dies ergibt

$$\frac{\eta(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} = \frac{d\eta}{d\zeta}(u) \leq \frac{g'(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \quad .$$

Daraus folgt, daß $\eta(u) \leq g'(u)$ für $u \in [\bar{u}, u_4]$. Hieraus folgt, zusammen mit $\eta(\bar{u}) = g'(\bar{u})$, daß die Ableitung der Basiskurve in $\bar{u}$ größer oder gleich der Ableitung der Schockkurve sein muß. Also ist

$$\frac{g''}{f''}(\bar{u}) \geq \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) \quad .$$

ii) Behauptung: $\frac{g''}{f''}(\bar{u}) \leq \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u})$.

Der Beweis zu Lemma 4.8 ergab

$$H(\bar{u},\bar{u}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u},\bar{u}) = 0 \text{ und } H(\bar{u},v) \geq 0 \text{ für } u_1 \leq v \leq \bar{u} \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} H(\bar{u},\bar{u}) \geq 0 \quad .$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial v} H(u,v) = \frac{F_n'(v)}{v-u_1} - \frac{F_n(v) - F_n(u_1)}{(v-u_1)^2}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} H(u,v) = \frac{F_n''(v)}{v-u_1} - \frac{F_n'(v)}{(v-u_1)^2} - \frac{F_n'(v)(v-u_1)^2 - (F_n(v) - F_n(u_1))2(v-u_1)}{(v-u_1)^4}$$

$$= \frac{F_n''(v)}{v-u_1} - 2\frac{F_n'(v) - \frac{F_n(v) - F_n(u_1)}{(v-u_1)}}{(v-u_1)^2} \quad .$$

Damit folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} H(\bar{u},\bar{u}) = \frac{F_n''(\bar{u})}{\bar{u}-u_1} \quad .$$

Also gilt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) f''(\bar{u}) - g''(\bar{u}) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) \geq \frac{g''}{f''}(\bar{u}) \quad .$$

q.e.d.

4.11 Lemma

Die Entropiebedingung für die Schockkurve (ζ, η) sei verletzt mit einem tangentialen Wert $\bar{v} \in (u_1, \bar{u})$. Dann liegen die Punkte $(\zeta,\eta)(\bar{u}), (f',g')(\bar{v}), (\frac{f(\bar{v}) - f(u_1)}{\bar{v} - u_1}, \frac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1})$,

$(\frac{f(\bar{u})-f(u_1)}{\bar{u}-u_1}, \frac{g(\bar{u})-g(u_1)}{\bar{u}-u_1}), (\frac{f(\bar{v})-f(\bar{u})}{\bar{v}-\bar{u}}, \frac{f(\bar{v})-f(\bar{u})}{\bar{v}-\bar{u}})$ auf der Tangenten an die Schockkurve im Punkte $(\zeta,\eta)(\bar{u})$, d.h. es gilt

(1)

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{\eta(\bar{u}) - \frac{g(\bar{u})-g(u_1)}{\bar{u}-u_1}}{f'(\bar{u}) - \frac{f(\bar{u})-f(u_1)}{\bar{u}-u_1}} = \frac{g'(\bar{v}) - \frac{g(\bar{v})-g(u_1)}{\bar{v}-u_1}}{f'(\bar{v}) - \frac{f(\bar{v})-f(u_1)}{\bar{v}-u_1}} = \frac{g'(\bar{v}) - \frac{g(\bar{u})-g(u_1)}{\bar{u}-u_1}}{f'(\bar{v}) - \frac{f(\bar{u})-f(u_1)}{\bar{u}-u_1}} = \frac{g'(\bar{v}) - \frac{g(\bar{v})-g(\bar{u})}{\bar{v}-\bar{u}}}{f'(\bar{v}) - \frac{f(\bar{v})-f(\bar{u})}{\bar{v}-\bar{u}}} \quad .$$

Außerdem gilt

(2)
$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{g'(\bar{v}) - \frac{g(\bar{v})-g(u_1)}{\bar{v}-u_1}}{f'(\bar{v}) - \frac{f(\bar{v})-f(u_1)}{\bar{v}-u_1}} \geq \frac{g''}{f''}(\bar{v}) \quad .$$

Beweis:

Die Behauptung (1) folgt ebenso wie im Beweis von Lemma 4.10 aus

$$F_n'(\bar{v}) = \frac{F_n(\bar{u})-F_n(u_1)}{\bar{u}-u_1} = \frac{F_n(\bar{v})-F_n(u_1)}{\bar{v}-u_1} = \frac{F_n(\bar{v})-F_n(\bar{u})}{\bar{v}-\bar{u}}$$

und aus der Differentialgleichung für (ζ,η)

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{\eta(\bar{u}) - \frac{g(\bar{u})-g(u_1)}{\bar{u}-u_1}}{f'(\bar{u}) - \frac{f(\bar{u})-f(u_1)}{\bar{u}-u_1}} \quad .$$

Zu (2): Es gilt

$$H(\bar{u},\bar{v}) = 0, \frac{\partial}{\partial v}H(\bar{u},\bar{v}) = 0 \text{ und } H(\bar{u},v) \geq 0 \text{ für alle } v \in [u_1,\bar{u}].$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}H(\bar{u},\bar{v}) \geq 0 \quad .$$

Aus

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}H(u,v) = \frac{F_n''(v)}{v-u_1} - 2\frac{F_n'(v) - \frac{F_n(v)-F_n(u_1)}{v-u_1}}{(v-u_1)^2}$$

und

$$F_n'(\bar{v}) = \frac{F_n(\bar{v})-F_n(u_1)}{\bar{v}-u_1}$$

folgt dann

$$F_n''(\bar{v}) \geq 0 \quad .$$

Mit der Normalen $n = \left(\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}), -1\right)$ folgt:

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u})f''(\bar{v}) - g''(\bar{v}) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) \geq \frac{g''}{f''}(\bar{v})$$

Da außerdem

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{g'(\bar{v}) - \dfrac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1}}{f'(\bar{v}) - \dfrac{f(\bar{v}) - f(u_1)}{\bar{v} - u_1}}$$

folgt die Behauptung (2).

q.e.d.

4.12 Lemma

Die Entropiebedingung für die Schockkurve (ζ, η) sei verletzt mit einem tangentialen Wert $\bar{v} = u_1$. Dann liegen die Punkte $(\zeta, \eta)(\bar{u})$, $(f'(u_1), g'(u_1))$ und $(\frac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}, \frac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1})$ auf der Tangenten an (ζ, η) im Punkte $(\zeta, \eta)(\bar{u})$, d.h. es gilt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{\eta(\bar{u}) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{\zeta(\bar{u}) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} = \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} \quad .$$

Außerdem gilt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} \geq \frac{g''}{f''}(u_1) \quad .$$

Beweis:

Der erste Teil der Behauptung folgt wie im Beweis des vorigen Lemmas aus

$$F_n'(u_1) = \frac{F_n(\bar{u}) - F_n(u_1)}{\bar{u} - u_1} \quad .$$

Es gilt

$$H(\bar{u}, u_1) = 0, \quad \text{und} \quad H(\bar{u}, v) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad v \in [u_1, \bar{u}].$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u}, u_1) \geq 0 \quad .$$

Da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v} H(\bar{u}, u_1) &= \lim_{v \to u_1} \frac{H(\bar{u}, v) - H(\bar{u}, u_1)}{v - u_1} \\
&= \lim_{v \to u_1} \left(\frac{\frac{F_n(v) - F_n(u_1)}{v - u_1} - F_n'(u_1)}{v - u_1} \right) \\
&= \lim_{v \to u_1} \frac{1}{2} F_n''(\tilde{v}(v)) \qquad \text{mit} \quad \tilde{v}(v) \in (u_1, v) \\
&= \frac{1}{2} F_n''(u_1)
\end{aligned}$$

folgt

$$F_n''(u_1) \geq 0 \quad .$$

Somit gilt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) \geq \frac{g''}{f''}(u_1) \quad .$$

q.e.d.

Im folgenden gebe ich einige äquivalente Formulierungen der Entropiebedingung an. Es wird sich zeigen, was die Ergebnisse der Lemmata 4.10–4.12 für den kritischen Entropiepunkt bedeuten. Es sei $(\zeta, \eta)(u)$ ein Punkt auf der Schockkurve. Die Entropiebedingung lautet

$$n \cdot \left(\frac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1}, \frac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} \right) \geq n \cdot \left(\frac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}, \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} \right) \quad \text{für alle } v \in [u_1, u] \quad .$$

Die Sprungbedingung lautet

$$n \cdot (\zeta(u), \eta(u)) = n \cdot \left(\frac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}, \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} \right) \quad .$$

Daraus folgt

$$n \cdot \left(\frac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1}, \frac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} \right) \geq n \cdot (\zeta(u), \eta(u)) \qquad \text{für alle } v \in [u_1, u].$$

4.13 Satz

Es sei (ζ, η) die oben definierte Schockkurve. Dann sind äquivalent:

(1) Die Entropiebedingung ist im Punkte $u \in [u_1, u_4]$ erfüllt, d.h.

$$\frac{F_n(v) - F_n(u_1)}{v - u_1} \geq \frac{F_n(u) - F_n(u_1)}{u - u_1} \qquad \text{für alle } v \in [u_1, u].$$

(2) Es gilt

$$n \cdot \left(\frac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1}, \frac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} \right) \geq n \cdot (\zeta(u), \eta(u)) \quad \text{für alle } v \in [u_1, u].$$

(3) Es gilt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(u) \leq \frac{\dfrac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\dfrac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \quad \text{für alle } v \in [u_1, u].$$

Dabei seien n und F_n wie oben definiert. Die Äquivalenz von (1) und (2) wurde soeben gezeigt. Setzt man in (1) die Normale $(\frac{d\eta}{d\zeta}(u), -1)$ ein, folgt wie im Beweis des Lemmas 4.7 die Äquivalenz von (1) und (3).

Anschaulich bedeutet 4.13.2, daß die durch die Parametrisierung

$$\mathcal{S}_{u_1}(u) = \left(\frac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}, \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}\right)$$

definierte Kurve zwischen $\mathcal{S}_{u_1}(u_1)$ und $\mathcal{S}_{u_1}(u)$ unterhalb der Tangenten am Schock liegen muß (siehe Abbildung 4.11).

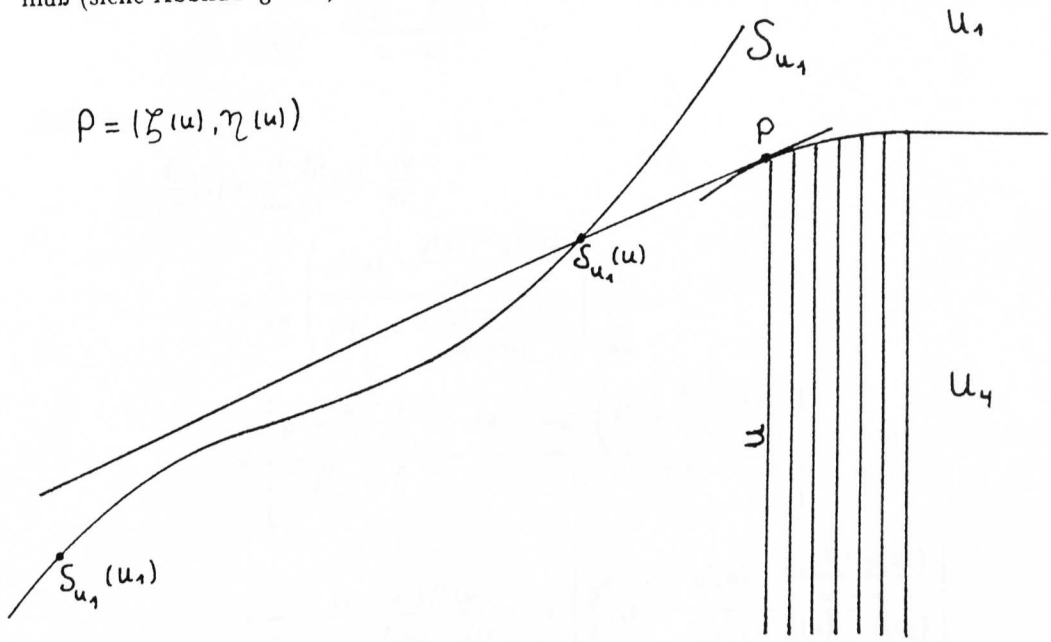


Abbildung 4.11

Dies motiviert die Untersuchung der Kurve $\mathcal{S}_{u_1}$.

4.14 Lemma

Seien $\rho(u) := \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}$ und $\sigma(u) := \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}$. Dann gilt

$$\frac{d\rho}{d\sigma}(u) = \frac{g'(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}} > 0$$

und

$$\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}(u) = \frac{(u-u_1)f''(u)}{\left(f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}\right)^2}\left[\frac{g''}{f''}(u) - \frac{g'(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}\right].$$

Beweis:

Es gilt

$$\frac{d\rho}{d\sigma}(u) = \frac{\dfrac{d}{du}\rho(u)}{\dfrac{d}{du}\sigma(u)} = \frac{\dfrac{g'(u)}{u-u_1} - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{(u-u_1)^2}}{\dfrac{f'(u)}{u-u_1} - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{(u-u_1)^2}}$$

$$= \frac{g'(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}} > 0 \qquad \text{da } f'' > 0 \text{ und } g'' > 0 \text{ sind.}$$

Außerdem ist

$$\frac{d}{d\sigma}\frac{d\rho}{d\sigma}(u) = \frac{d}{du}\frac{d\rho}{d\sigma}(u)\cdot\frac{du}{d\sigma}$$

$$= \frac{d}{du}\left(\frac{g'(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}\right)\frac{1}{\dfrac{d\sigma}{du}}$$

$$= \left[\frac{g'' - \dfrac{g'-\Delta g}{u-u_1}}{f'-\Delta f} - \frac{(g'-\Delta g)\left(f'' - \dfrac{f'-\Delta f}{u-u_1}\right)}{(f'-\Delta f)^2}\right]\frac{u-u_1}{f'-\Delta f}$$

$$= \frac{(u-u_1)f''(u)}{\left(f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}\right)^2}\left[\frac{g''}{f''}(u) - \frac{g'(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}\right].$$

Dabei sind $\Delta f = \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}$ und $\Delta g = \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}$.

q.e.d.

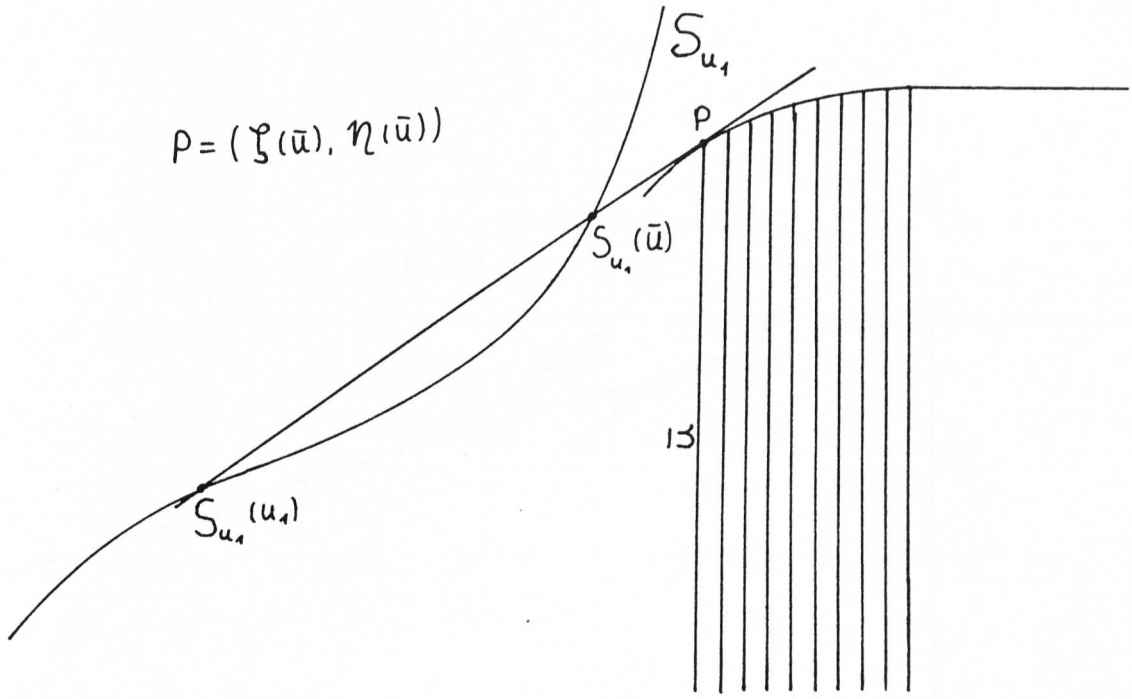


Abbildung 4.12: $\bar{v} = u_1$

4.15 Bemerkung

Die Abbildungen 4.12–4.14 zeigen, was für den kritischen Entropiepunkt aus den vorangegangenen Lemmata folgt.

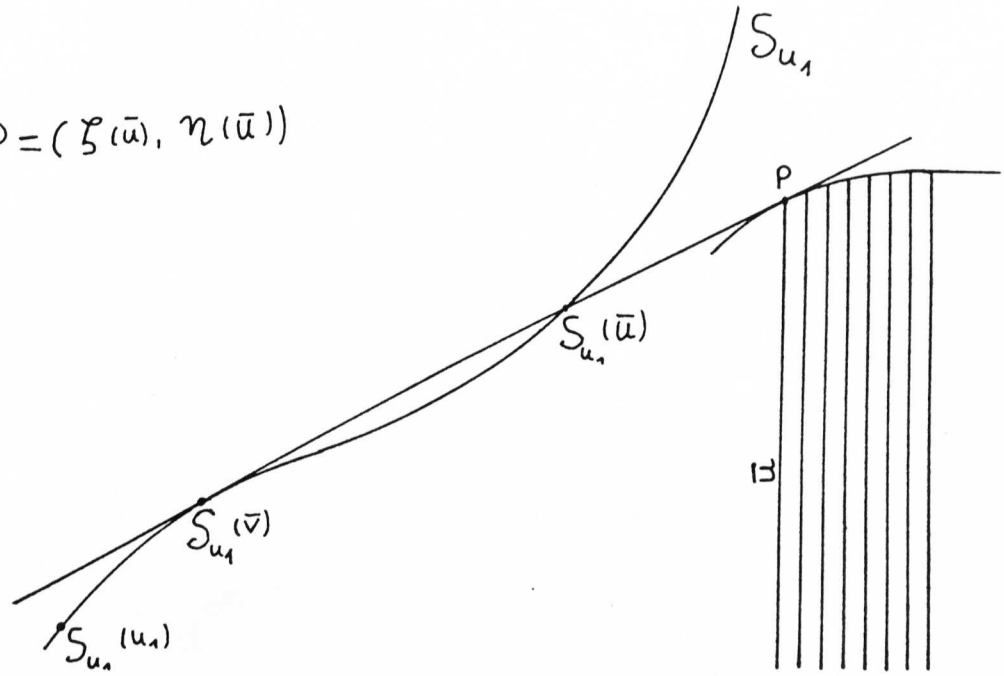


Abbildung 4.13: $u_1 < \bar{v} < \bar{u}$

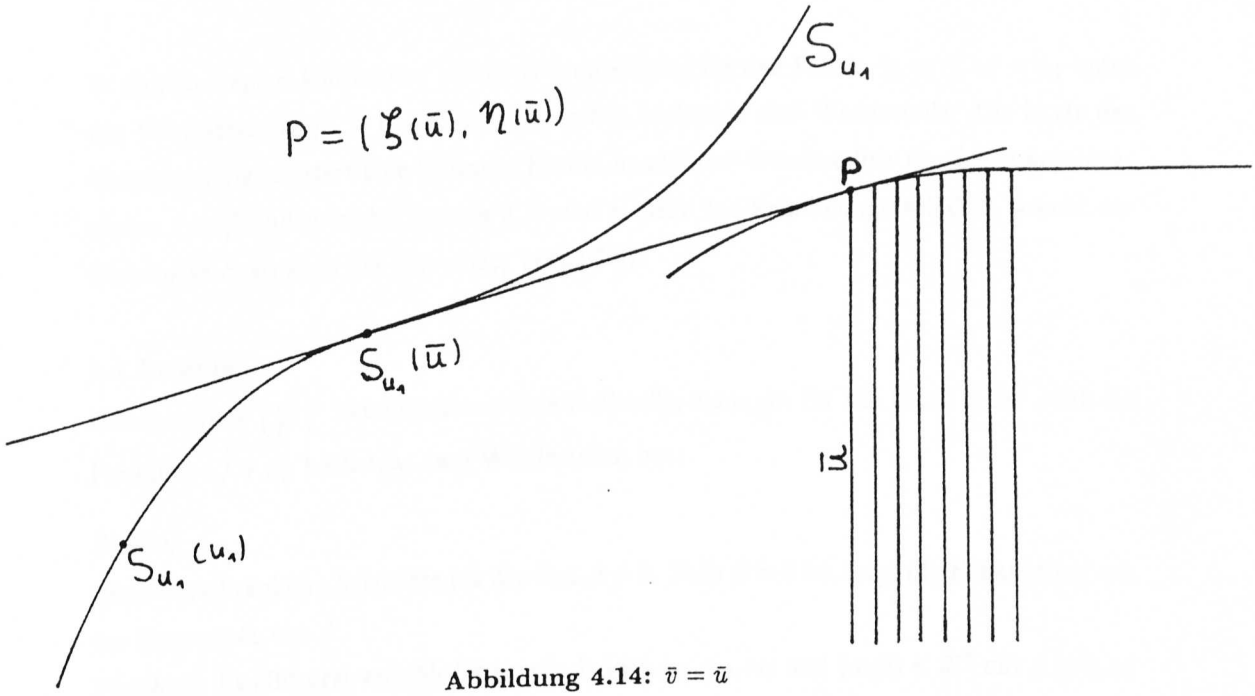


Abbildung 4.14: $\bar{v} = \bar{u}$

KAPITEL 5
KONSTRUKTION DER ENVELOPPEWELLE

In diesem Kapitel konstruiere ich die Entropielösung für den Fall $u_3 \leq u_2 \leq u_1 < u_4$ unter der Voraussetzung $f'' > 0$, $g'' > 0$ und g hat höchstens eine Wendestelle. Die letzte der Voraussetzungen liefert eine Schranke für die Anzahl der Wendestellen von Linearkombinationen von f und g (siehe Lemma 5.1) und steuert das Krümmungsverhalten sowohl der Basiskurve $\mathcal{B}$ als auch der Kurve $\mathcal{S}_{u_1}$ (siehe 5.5).

5.1 Lemma

Der Ausdruck $\left(\frac{g''}{f''}\right)'$ habe höchstens eine Nullstelle, dann gilt für alle $(\alpha, \beta) \in I\!R^2$, daß die Funktion $\alpha f + \beta g$ höchstens zwei Wendestellen hat.

Beweis:

Ohne Einschränkung betrachte ich den Fall $\beta \neq 0$. Falls $\beta = 0$ ist, folgt die Behauptung aus der Konvexität von f.

Annahme: Es gibt drei verschiedene reelle Zahlen w_1, w_2, w_3 und $(\alpha, \beta) \in I\!R^2$ mit $\beta \neq 0$, so daß

$$\alpha f''(w_i) + \beta g''(w_i) = 0 \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

Dann folgt

$$\frac{g''}{f''}(w_i) = -\frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

Also gibt es $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in I\!R$ mit $w_1 < \bar{w}_1 < w_2 < \bar{w}_2 < w_3$, so daß

$$\left(\frac{g''}{f''}\right)'(\bar{w}_i) = 0 \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

q.e.d.

Das Ziel dieses Kapitels ist es den folgenden Satz zu beweisen.

5.2 Satz

Gegeben sei die Gleichung

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \tag{1}$$

mit den Anfangsdaten

$$u(0, x, y) = \begin{cases} u_1, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y > 0 \\ u_2, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y > 0 \\ u_3, & \text{falls } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ u_4, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y < 0 \end{cases} . \tag{2}$$

Dabei seien $u_3 \leq u_2 \leq u_1 < u_4$ und $f, g \in C^4(\mathbb{R})$, so daß

1.) $f'' > 0, \quad g'' > 0$ und

2.) $\exists a \in \mathbb{R}$ mit

$$\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u) < 0 \quad \text{für } u < a \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u) > 0 \quad \text{für } u > a \quad .$$

Dann gilt

I) im Fall $u_1 < a$:

Es existieren $p(u_4), q(u_4) \in \mathbb{R}$ mit $u_1 < p \leq q \leq \infty$ (falls $p < \infty$ gilt $p < q$), so daß gilt:

$$\begin{array}{rcll} u_4 \leq p & \Longrightarrow & \text{die Entropielösung hat die Gestalt (A)} & \text{(siehe Abb. 4.7)}, \\ p < u_4 < q & \Longrightarrow & \text{die Entropielösung hat die Gestalt (B)} & \text{(siehe Abb.'n 5.1 und 5.2)}, \\ q \leq u_4 & \Longrightarrow & \text{die Entropielösung hat die Gestalt (C)} & \text{(siehe Abb. 5.3)}. \end{array}$$

für großen u_4 passiert nicht viel

II) im Fall $u_1 > a$:

Die Entropielösung hat stets die Gestalt (C).

III) im Fall $u_1 = a$:

Es existiert ein $r(u_4) \in \mathbb{R}$ mit $u_1 \leq r \leq \infty$, so daß gilt:

$$\begin{array}{rcll} u_4 \leq r & \Longrightarrow & \text{die Entropielösung hat die Gestalt (A)} & \text{(siehe Abb. 4.7)}, \\ r < u_4 & \Longrightarrow & \text{die Entropielösung hat die Gestalt (C)} & \text{(siehe Abb. 5.3)}. \end{array}$$

∎

Im Verlauf des Beweises werden die Lösungen exakt definiert. Anhand der Abbildung 5.2 beschreibe ich kurz, wie die Lösung mit der Gestalt (B) aussieht. Im Punkt $P_4 = (f'(\bar{u}), \eta(\bar{u}))$ spaltet sich eine Charakteristik mit dem Wert $\bar{v}$ tangential ab. Es entsteht ein Schock zwischen den Werten u_1 und $\bar{v}$. Die Schockkurve η setzt sich so fort, daß in jedem Schockpunkt eine Charakteristik tangential startet. Die Schockstärke nimmt streng monoton ab. Die Schwierigkeit liegt darin, die Schockkurve so zu definieren, daß zum einen die Sprungbedingung erfüllt ist und zum anderen wohldefinierte Charakteristiken aus dem Schock laufen. Es kann weiter gezeigt werden, daß ein $\tilde{u}$ existiert, so daß die Schockstärke im Punkt $P_3 = (f'(\tilde{u}), g'(\tilde{u}))$ zu Null degeneriert. Auf der Basiskurve zwischen $P_2 = (f'(\bar{v}), g'(\bar{v}))$ und $P_3 = (f'(\tilde{u}), g'(\tilde{u}))$ treffen sich die Charakteristiken mit den Werten $u \in [\bar{v}, \tilde{u}]$. Die Lösung ist auf dieser Kurve stetig, aber nicht differenzierbar. Schließlich setzt sich von P_2 aus eine Schockkurve fort, die bis in den Punkt $P_1 = (f'(u_1), g'(u_1))$ läuft. Die Welle, die durch die Schockgerade durch die Punkte P_2 und P_4, durch die Basiskurve zwischen P_2 und P_3, sowie durch die Schockkurve zwischen P_3 und P_4 eingeschloßen wird, nenne ich Enveloppewelle, da die Schockkurve zwischen P_3 und P_4 die Einhüllende oder Enveloppe der Kurvenschar ist, die aus

den Charakteristiken besteht, die oberhalb der Schockkurve starten (Zu dem Begriff Enveloppe siehe R.Courant: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd.2, S.149ff).

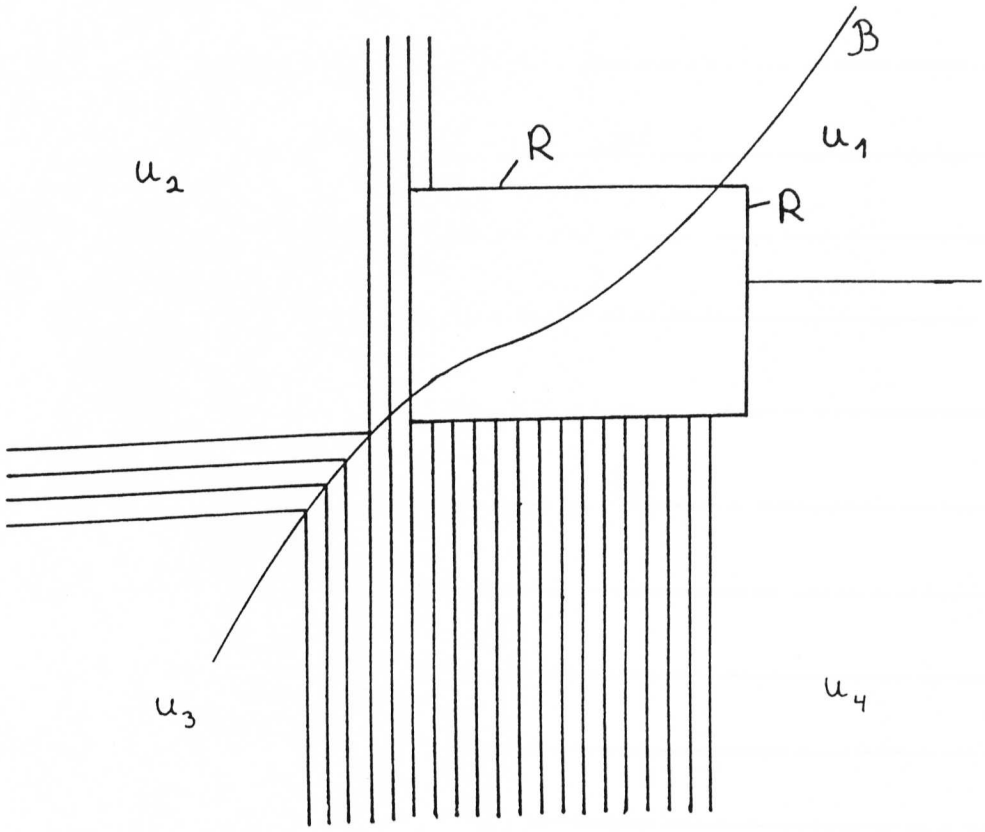


Abbildung 5.1: Gestalt (B)

(zur Gestalt der Lösung im Rechteck R siehe Abb. 5.2)

5.3 Bemerkung

1.) Der Fall $\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u) \neq 0$ (für alle $u \in I\!R$) wurde schon von Chang und Zheng [2] behandelt. Deshalb beschränke ich mich auf den Fall, daß $\left(\frac{g''}{f''}\right)'$ eine Nullstelle hat. Für den Fall, daß

$$\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u) > 0 \quad \text{für } u < b \quad (b \in I\!R)$$

$$\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u) < 0 \quad \text{für } u > b \quad ,$$

zeigt man mit den gleichen Methoden wie im Beweis des Satzes 5.2, daß für $u_1 < b$ die Lösung qualitativ die Gestalt (C) hat und für $u_1 \geq b$ stets die Gestalt (A) auftritt. Der Beweis kann mit den Methoden aus dem Beweis des Satzes 5.2 geführt werden. Deshalb beschränke ich mich darauf, den im Satz behandelten Fall zu beweisen.

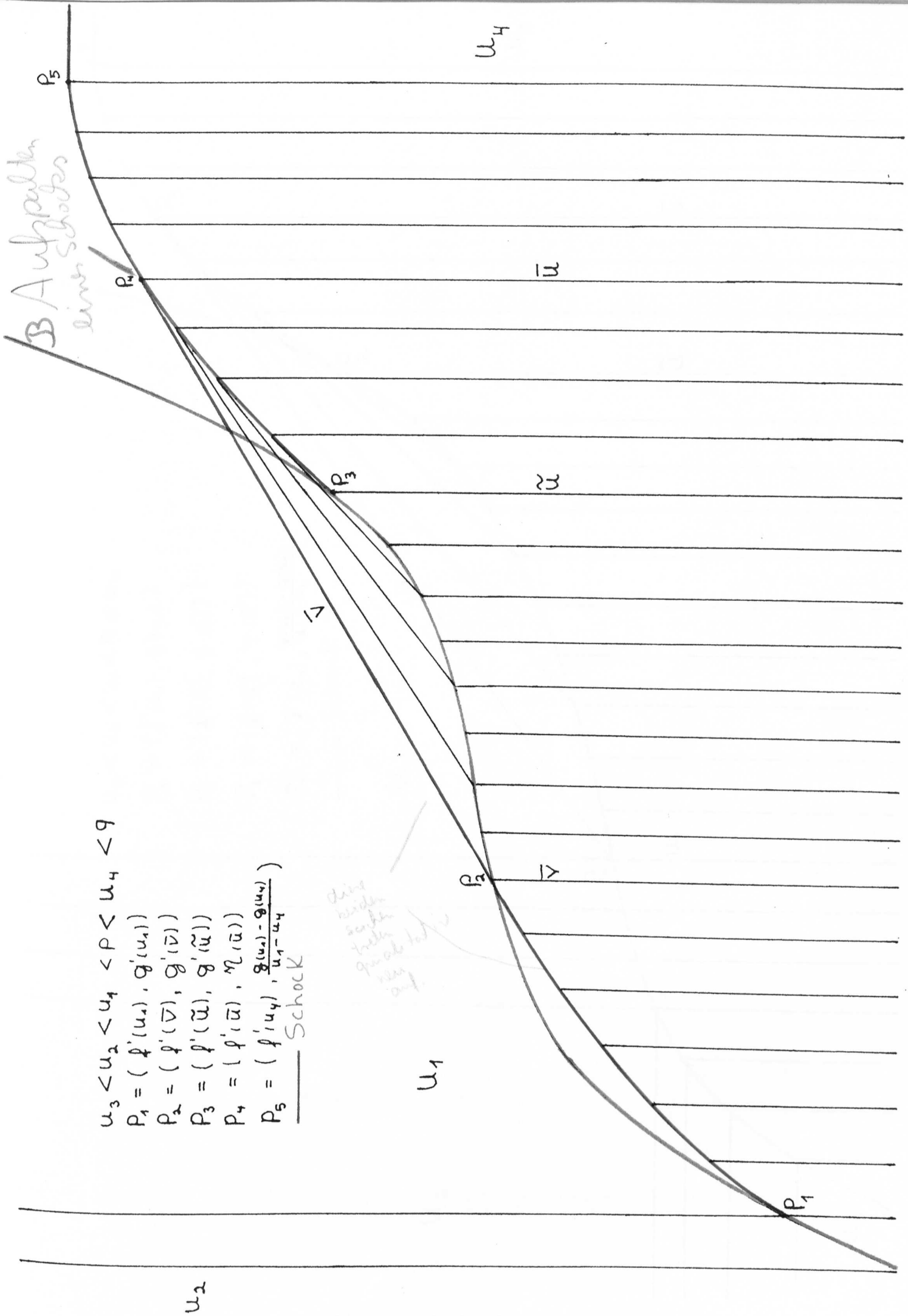


Abbildung 5.2: Gestalt (B)

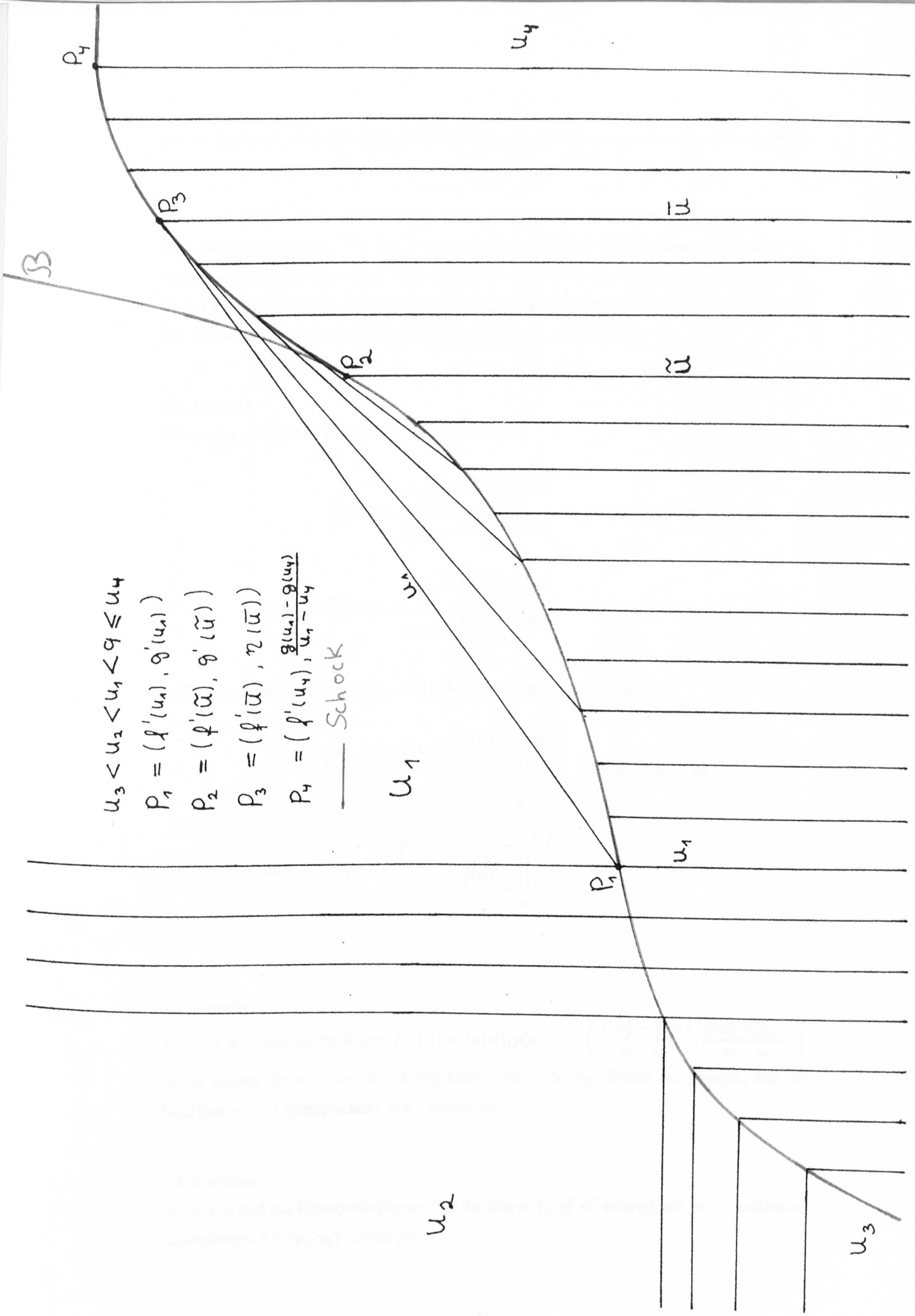


Abbildung 5.3: Gestalt (C)

2.) Im Kapitel 6 werde ich zeigen, daß es Fälle gibt, für die $p < q < \infty$ gilt, d.h. in denen alle drei Phänomene aus der Aussage des Satzes 5.2 auftreten.

Ich werde den Beweis zunächst für den Fall $u_1 < a$ führen. Die anderen Fälle ergeben sich mit analogen Methoden. Für den Beweis benötige ich einige Hilfsaussagen. Wir haben im letzten Kapitel gesehen, welche Rolle die Kurve $\mathcal{S}_{u_1}$ für die Untersuchung der Entropiebedingung spielt. Deshalb untersuche ich im folgendem Lemma, welche Folgerungen ich aus der Voraussetzung 2.) des Satzes 5.2 für die Kurve $\mathcal{S}_{u_1}$ ziehen kann.

5.4 Lemma

Sei $u_1 < a$. Dann gibt es ein $w_1 \in (u_1, \infty]$, so daß

$$\frac{g''}{f''}(w) < \frac{g'(w) - \dfrac{g(w) - g(u_1)}{w - u_1}}{f'(w) - \dfrac{f(w) - f(u_1)}{w - u_1}} \qquad \text{für } u_1 < w < w_1$$

$$\text{und} \qquad \frac{g''}{f''}(w) > \frac{g'(w) - \dfrac{g(w) - g(u_1)}{w - u_1}}{f'(w) - \dfrac{f(w) - f(u_1)}{w - u_1}} \qquad \text{für} \quad w > w_1 \quad .$$

Außerdem existiert ein $w_2 \in [w_1, \infty]$ (falls $w_1 < \infty$ ist $w_1 < w_2$), so daß

$$\frac{g''}{f''}(u_1) > \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(w) - g(u_1)}{w - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(w) - f(u_1)}{w - u_1}} \qquad \text{für } u_1 < w < w_2$$

$$\text{und} \qquad \frac{g''}{f''}(u_1) < \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(w) - g(u_1)}{w - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(w) - f(u_1)}{w - u_1}} \qquad \text{für} \quad w > w_2 \quad .$$

5.5 Korollar

Sei $u_1 < a$. Dann ist die Kurve $\mathcal{S}_{u_1}(w) = (\sigma(w), \rho(w)) := \left(\dfrac{f(w) - f(u_1)}{w - u_1}, \dfrac{g(w) - g(u_1)}{w - u_1} \right)$ streng konkav für $w < w_1$ und streng konvex für $w > w_1$. Damit sei gemeint, daß die Funktion $\rho(\sigma^{-1})$ streng konkav bzw. konvex ist.

5.6 Korollar

Sei $u_1 < a$ und die Entropiebedingung für die Kurve (ζ, η) sei verletzt mit einem kritischen Entropiewert $\bar{u} \in (u_1, u_4)$. Dann gilt:

1.) $\bar{u} \geq w_1$.

2.) Es gibt genau einen tangentialen Wert $\bar{v}$.

3.) Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{u} = w_1 &\iff \bar{v} = \bar{u} \\ w_1 < \bar{u} < w_2 &\iff u_1 < \bar{v} < w_1 \\ \bar{u} \geq w_2 &\iff \bar{v} = u_1 \quad . \end{aligned}$$

Beweis von Lemma 5.4:

Sei

$$D(w) := \frac{g''}{f''}(w)\,[f'(w)(w-u_1) - f(w) + f(u_1)] - g'(w)(w-u_1) + g(w) - g(u_1) \quad .$$

Es gilt

$$D(u_1) = 0 \qquad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw}D(w) &= \left(\frac{g''}{f''}\right)'(w)\,[f'(w)(w-u_1) - f(w) + f(u_1)] + \frac{g''}{f''}(w)\,[f''(w)(w-u_1) + f'(w) - f'(w)] - \\ &\quad - g''(w)(w-u_1) - g'(w) + g'(w) \\ &= \left(\frac{g''}{f''}\right)'(w)\,\underbrace{[f'(w)(w-u_1) - f(w) + f(u_1)]}_{>0 \text{ für } w>u_1} \end{aligned}$$

Daraus folgt für $u_1 < w < a$, daß

$$\frac{d}{dw}D(w) < 0$$

und für $w > a$, daß

$$\frac{d}{dw}D(w) > 0 \quad .$$

D hat also die in Abbildung 5.4 skizzierte Gestalt.

Es folgt, daß D höchstens eine Nullstelle w_1 im Intervall (u_1, ∞) hat. Setze $w_1 = \infty$, falls keine Nullstelle im Intervall (u_1, ∞) existiert. Damit folgt aus

$$D(w) = (f'(w)(w-u_1) - f(w) + f(u_1)) \left(\frac{g''}{f''}(w) - \frac{g'(w) - \dfrac{g(w)-g(u_1)}{w-u_1}}{f'(w) - \dfrac{f(w)-f(u_1)}{w-u_1}} \right)$$

der erste Teil der Behauptung.

Sei nun $\rho(w) = \dfrac{g(w)-g(u_1)}{w-u_1}$ und $\sigma(w) = \dfrac{f(w)-f(u_1)}{w-u_1}$. Aus Lemma 4.14 folgt

$$\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}(w) = \frac{(w-u_1)f''(w)}{\left(f'(w) - \dfrac{f(w)-f(u_1)}{w-u_1}\right)^2} \left[\frac{g''}{f''}(w) - \frac{g'(w) - \dfrac{g(w)-g(u_1)}{w-u_1}}{f'(w) - \dfrac{f(w)-f(u_1)}{w-u_1}} \right] .$$

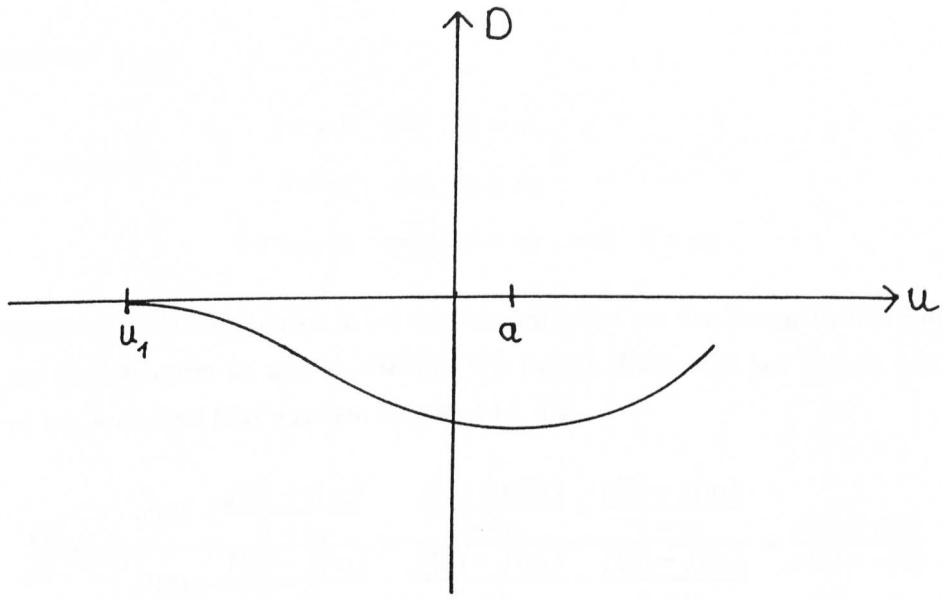


Abbildung 5.4

Also folgt aus dem eben gezeigten und der Konvexität von f, daß $\mathcal{S}_{u_1}$ für $w \in [u_1, w_1]$ konkav ist. Für diese w gilt also

$$\frac{g''}{f''}(u_1) = \frac{d\rho}{d\sigma}(u_1) > \frac{\rho(u_1) - \rho(w)}{\sigma(u_1) - \sigma(w)} = \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(w) - g(u_1)}{w - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(w) - f(u_1)}{w - u_1}} \quad .$$

Falls $w_1 < \infty$ ist, ist $\mathcal{S}_{u_1}$ für $w > w_1$ konvex. Deshalb gibt es ein $w_2 \in (w_1, \infty]$ mit

$$\frac{g''}{f''}(u_1) > \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(w) - g(u_1)}{w - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(w) - f(u_1)}{w - u_1}} \qquad \text{für } u_1 < w < w_2$$

$$\text{und} \qquad \frac{g''}{f''}(u_1) < \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(w) - g(u_1)}{w - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(w) - f(u_1)}{w - u_1}} \qquad \text{für} \quad w > w_2 \quad .$$

q.e.d.

Die Aussage von Korollar 5.5 folgt aus Lemma 5.4, der obigen Darstellung von $\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}$ zusammen mit analogen Überlegungen für $w < u_1$.

Beweis von Korollar 5.6:

Annahme: Die Entropiebedingung sei für die Schockkurve (ζ, η) aus dem vorigen Kapitel verletzt. Dann existiert ein kritischer Entropiewert $\bar{u} \in [u_1, u_4]$ und ein tangentialer Wert $\bar{v} \in [u_1, \bar{u}]$.

Behauptung:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \bar{v} = \bar{u} &\implies \bar{u} = w_1 \\ \bar{v} = u_1 &\implies \bar{u} \geq w_2 \\ \bar{v} \in (u_1, \bar{u}) &\implies \bar{v} < w_1 \quad \textit{und} \quad \bar{u} > w_1 \end{aligned}$$

Die ersten beiden Behauptungen in $(*)$ ergeben sich sofort aus den Lemmata 4.10 und 4.12 und der Definition von w_1 und w_2. Sei nun $\bar{v} \in (u_1, \bar{u})$. Dann folgt aus Lemma 4.11, daß $\bar{v} \leq w_1$ ist. Außerdem folgt aus dem Lemma 4.11, daß

$$\frac{d\rho}{d\sigma}(\bar{v}) = \frac{g'(\bar{v}) - \dfrac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1}}{f'(\bar{v}) - \dfrac{f(\bar{v}) - f(u_1)}{\bar{v} - u_1}} = \frac{\dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1} - \dfrac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1}}{\dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1} - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} = \frac{\rho(\bar{u}) - \rho(\bar{v})}{\sigma(\bar{u}) - \sigma(\bar{v})}$$

Da $(\sigma, \rho)(v)$ für $v < w_1$ konkav und für $v > w_1$ konvex ist, muß $\bar{u} \geq w_1$ sein. Da $\bar{u} \neq \bar{v}$ kann $\bar{u} = w_1$ ausgeschlossen werden. Also muß auch $\bar{v} < w_1$ sein. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Da $\bar{v} \in [u_1, \bar{u}]$ folgt aus $(*)$, daß $\bar{u} \geq w_1$ gelten muß. Damit ist 1.) nachgewiesen.

zu 3.) "$\Longleftarrow$" Diese Richtung folgt unmittelbar aus $(*)$.

"$\Longrightarrow$"

Annahme: $\bar{u} = w_1$

Da $\bar{v} \in [u_1, \bar{u}]$, folgt aus $(*)$, daß notwendigerweise $\bar{v} = \bar{u}$ ist.

Annahme: $w_1 < \bar{u} < w_2$.

Aus $(*)$ folgt sofort, daß $\bar{v} \in (u_1, w_1)$ sein muß.

Annahme: $\bar{u} \geq w_2$.

Um $\bar{v} = u_1$ zu zeigen, muß ich wegen $(*)$ nur noch $\bar{v} \in (u_1, \bar{u})$ ausschließen. Angenommen $\bar{v} \in (u_1, \bar{u})$, dann folgt aus $(*)$, daß $\bar{v} < w_1$ ist. Da $u_1 < \bar{v}$ und (σ, ρ) zwischen u_1 und $\bar{v}$ konkav ist, folgt $\dfrac{d\rho}{d\sigma}(u_1) > \dfrac{d\rho}{d\sigma}(\bar{v})$. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1} - \dfrac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1}}{\dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1} - \dfrac{f(\bar{v}) - f(u_1)}{\bar{v} - u_1}} &= \frac{g'(\bar{v}) - \dfrac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1}}{f'(\bar{v}) - \dfrac{f(\bar{v}) - f(u_1)}{\bar{v} - u_1}} \\ &= \frac{d\rho}{d\sigma}(\bar{v}) < \frac{d\rho}{d\sigma}(u_1) = \frac{g''}{f''}(u_1) \\ &\leq \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} \end{aligned}$$

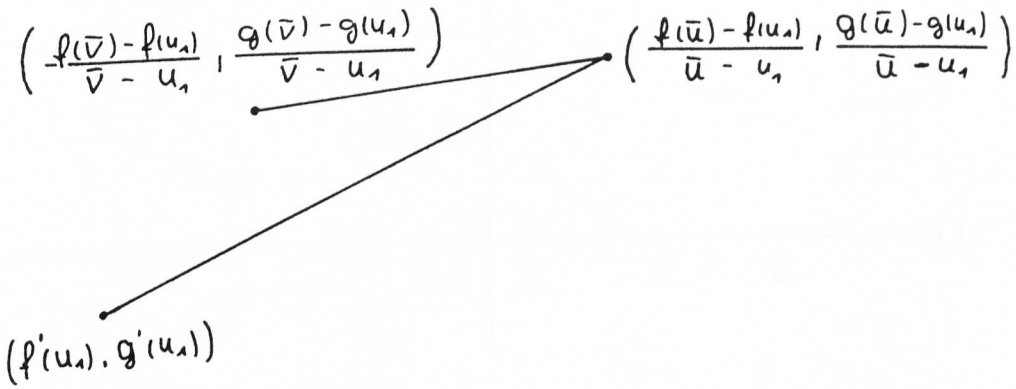


Abbildung 5.5

Da $f'(u_1) < \dfrac{f(\bar{v})-f(u_1)}{\bar{v}-u_1} < \dfrac{f(\bar{u})-f(u_1)}{\bar{u}-u_1}$ und $g'(u_1) < \dfrac{g(\bar{v})-g(u_1)}{\bar{v}-u_1} < \dfrac{g(\bar{u})-g(u_1)}{\bar{u}-u_1}$ bin ich in der Situation in Abbildung 5.5

Da außerdem $\bar{v} < w_2$ und $\bar{u} \geq w_2$, folgt

$$\frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{v})-g(u_1)}{\bar{v}-u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{v})-f(u_1)}{\bar{v}-u_1}} \geq \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{u})-g(u_1)}{\bar{u}-u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{u})-f(u_1)}{\bar{u}-u_1}} \geq \frac{g''}{f''}(u_1) > \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{v})-g(u_1)}{\bar{v}-u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{v})-f(u_1)}{\bar{v}-u_1}},$$

ein Widerspruch!

Damit ist die Annahme $\bar{v} \in (u_1, \bar{u})$ zum Widerspruch geführt. Also gilt $\bar{v} = u_1$. Damit ist 3.) nachgewiesen.

Um 2.) zu zeigen, muß noch ausgeschloßen werden, daß zwei tangentiale Werte auftreten. Für $\bar{u} = w_1$ und $\bar{u} \geq w_2$ folgt die Behauptung aus 3.).

Annahme: Es sei $w_1 < \bar{u} < w_2$ und es gebe zwei tangentiale Werte $\bar{v}, \tilde{v} \in (u_1, \bar{u})$.

Aus Lemma 4.11 würde folgen, daß

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{g'(\bar{v}) - \dfrac{g(\bar{v})-g(u_1)}{\bar{v}-u_1}}{f'(\bar{v}) - \dfrac{f(\bar{v})-f(u_1)}{\bar{v}-u_1}} = \frac{g'(\tilde{v}) - \dfrac{g(\tilde{v})-g(u_1)}{\tilde{v}-u_1}}{f'(\tilde{v}) - \dfrac{f(\tilde{v})-f(u_1)}{\tilde{v}-u_1}}$$

und wegen 3.) gilt $\bar{v}, \tilde{v} < w_1$. Aus

$$\frac{d\rho}{d\sigma}(v) = \frac{g'(v) - \dfrac{g(v)-g(u_1)}{v-u_1}}{f'(v) - \dfrac{f(v)-f(u_1)}{v-u_1}}$$

und der strengen Konkavität von (ρ, σ) im Intervall (u_1, w_1), folgt dann $\bar{v} = \tilde{v}$.

q.e.d.

Aus dem folgenden Lemma folgt, daß eine Entropieverletzung mit einem kritischen Entropiewert $\bar{u} = w_1$ nicht möglich ist.

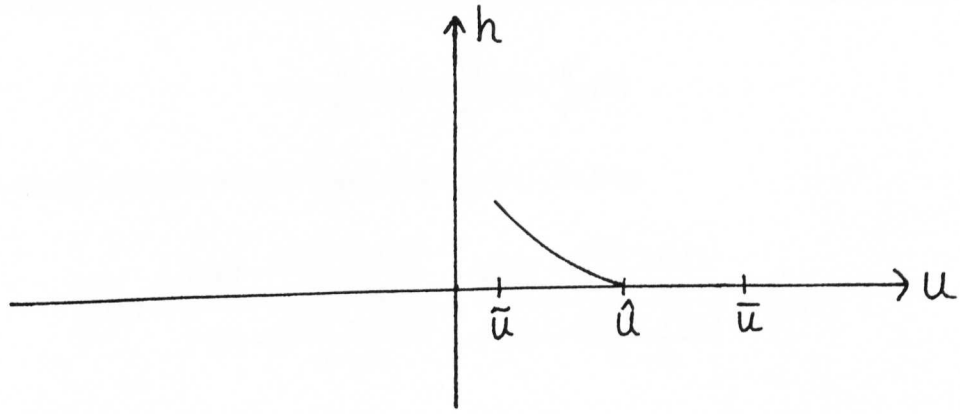


Abbildung 5.6

5.7 Lemma

Sei $u_1 < a$. Eine Entropieverletzung der Schockkurve (ζ, η) mit einem tangentialen Wert $\bar{v} = \bar{u}$ tritt nicht auf.

Beweis:

Annahme: $\bar{v} = \bar{u}$ ist tangentialer Wert zu einem kritischen Entropiewert $\bar{u}$.

Aus Korollar 5.6 folgt, daß $\bar{u} = w_1$ ist. Nach Lemma 4.10 gilt $\eta(\bar{u}) = g'(\bar{u})$ und

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{g'(\bar{u}) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(\bar{u}) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} = \frac{g''}{f''}(\bar{u})$$

Ich werde jetzt zeigen, daß (ζ, η) für $u \in (u_1, \bar{u})$ unterhalb der Basiskurve liegt und der Entropiebedingung genügt. Das wäre dann ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\bar{u}$ ein kritischer Entropiewert ist.

Annahme: Es gibt ein $\tilde{u} \in (u_1, \bar{u})$ mit $\eta(\tilde{u}) \geq g'(\tilde{u})$.

Dann folgt nach Lemma 5.4

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\tilde{u}) = \frac{\eta(\tilde{u}) - \dfrac{g(\tilde{u}) - g(u_1)}{\tilde{u} - u_1}}{f'(\tilde{u}) - \dfrac{f(\tilde{u}) - f(u_1)}{\tilde{u} - u_1}} \geq \frac{g'(\tilde{u}) - \dfrac{g(\tilde{u}) - g(u_1)}{\tilde{u} - u_1}}{f'(\tilde{u}) - \dfrac{f(\tilde{u}) - f(u_1)}{\tilde{u} - u_1}} > \frac{g''}{f''}(\tilde{u}) \quad , \quad \text{da} \quad \tilde{u} < \bar{u} = w_1 \quad .$$

Sei nun $h(u) := \eta(u) - g'(u)$ und

$$\hat{u} := \sup\{\, u \mid h_{|(\tilde{u}, u]} > 0 \text{ mit } u \in (\tilde{u}, \bar{u}] \,\}$$

Es gilt $\hat{u} > \tilde{u}$, da

$$\frac{d}{du} h(\tilde{u}) = \left(\frac{d\eta}{d\zeta}(\tilde{u}) - \frac{g''}{f''}(\tilde{u}) \right) \frac{d\zeta}{du} > 0 \quad .$$

Außerdem ist $h(\hat{u}) = 0$ (da $h(\bar{u}) = 0$) und $h(\tilde{u}) \geq 0$. Also gibt es ein $\tilde{w} \in (\tilde{u}, \hat{u})$, so daß

$$(*) \qquad 0 \geq \frac{d}{d\zeta} h(\tilde{w}) = \frac{d\eta}{d\zeta}(\tilde{w}) - \frac{g''}{f''}(\tilde{w}) \quad .$$

Andererseits gilt $h(\tilde{w}) > 0$ und damit $\eta(\tilde{w}) \geq g'(\tilde{w})$. Es folgt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\tilde{w}) = \frac{\eta(\tilde{w}) - \dfrac{g(\tilde{w}) - g(u_1)}{\tilde{w} - u_1}}{f'(\tilde{w}) - \dfrac{f(\tilde{w}) - f(u_1)}{\tilde{w} - u_1}} \geq \frac{g'(\tilde{w}) - \dfrac{g(\tilde{w}) - g(u_1)}{\tilde{w} - u_1}}{f'(\tilde{w}) - \dfrac{f(\tilde{w}) - f(u_1)}{\tilde{w} - u_1}} > \frac{g''}{f''}(\tilde{w}) \quad .$$

Ein Widerspruch zu $(*)$. Es muß also $\eta(u) < g'(u)$ sein für alle $u \in (u_1, \bar{u})$.
Damit zeige ich, daß die Entropiebedingung erfüllt ist. Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(u) \leq \frac{\dfrac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\dfrac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} =: G(u, v)$$

für alle $u \in (u_1, \bar{u})$ und alle $v \in [u_1, u]$. Da $\mathcal{S}_{u_1}$ für $u < \bar{u} = w_1$ konkav ist, folgt

$$\min_{v \in [u_1, \bar{u}]} G(u, v) = G(u, u) = \frac{g'(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}}$$

Aus $\eta(u) < g'(u)$ folgt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(u) = \frac{\eta(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} < \frac{g'(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \leq G(u, v) \quad \text{für alle} \quad v \in [u_1, u].$$

Daraus folgt, daß die Entropiebedingung erfüllt ist und $\bar{u}$ somit kein kritischer Entropiewert sein kann. Ein Widerspruch zur Voraussetzung.

q.e.d.

Beweis des Satzes 5.2:

I.) Der Fall $u_1 < a$.

Der Beweis erfolgt in folgenden Schritten:

a) Ich zeige, daß es ein $p \in (u_1, \infty]$ gibt, so daß für alle $u_4 \in (u_1, p]$ die Entropiebedingung für die Schockkurve $(\zeta, \eta(., u_4))$ erfüllt ist und für alle $u_4 > p$ verletzt wird. Für alle $u_4 \in (u_1, p]$ hat die Lösung also die Gestalt (A). Da in diesem Satz der Anfangswert u_4 variabel gehalten wird, deute ich die Abhängigkeit der Schockkurve von u_4, falls es nicht aus dem Zusammenhang deutlich wird, mit $(\zeta, \eta(., u_4))$ an.

Im Fall $p = \infty$ ist die Behauptung gezeigt. Ansonsten zeige ich:

b) Es gibt ein $q \in (p, \infty]$, so daß für alle $u_4 \in (p, q)$ der tangentiale Wert $\bar{v}$ im Intervall $(u_1, \bar{u})$ liegt.

c) Ich konstuiere die Entropielösung in diesem Fall. Für die Lösung ergibt sich die Gestalt (B).

Falls $q = \infty$ ist, ist die Behauptung gezeigt.

d) Für den Fall $q < \infty$ ergibt sich für $u_4 > q$ stets ein tangentialer Wert $\bar{v} = u_1$. Auch in diesem Fall konstruiere ich die Entropielösung.

zu a): Sei

$$N := \{\ u_4 \mid u_4 > u_1 \text{ und die Schockkurve } (\zeta, \eta(., u_4)) \text{ erfüllt die Entropiebedingung } \}$$

Aus Korollar 5.6 und aus Lemma 5.7 folgt, daß die Schockkurve $(\zeta, \eta(., u_4))$ mit $u_4 \in (u_1, w_1]$ der Entropiebedingung genügt. Es ist also $N \neq \emptyset$. Sei nun

$$p := \sup N$$

Dann folgt $p \geq w_1 > u_1$.

Behauptung: Für alle $u_4 \in [u_1, p]$ erfüllt die Schockkurve $(\zeta, \eta(., u_4))$die Entropiebedingung. Zunächst sei $u_4 \in (u_1, p)$. Falls $u_4 \in N$, ist nichts zu zeigen. Ist $u_4 \notin N$, existiert nach Definition von p ein $\tilde{u_4} \in (u_4, p]$, so daß die Entropiebedingung für die Schockkurve $(\zeta, \eta(., \tilde{u}_4))$erfüllt ist. Aus Hilfssatz 4.5 folgt

$$\eta(u_4, \tilde{u_4}) > \frac{g(u_4) - g(u_1)}{u_4 - u_1} = \eta(u_4, u_4) \quad .$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems folgt:

$$\eta(u, \tilde{u_4}) > \eta(u, u_4) \text{ für alle } u \in (u_1, u_4].$$

Daraus folgt:

$$(+) \qquad \frac{d}{d\zeta}\eta(u, u_4) = \frac{\eta(u, u_4) - \dfrac{g(u) - g(u_4)}{u - u_4}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_4)}{u - u_4}} < \frac{\eta(u, \tilde{u_4}) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} = \frac{d}{d\zeta}\eta(u, \tilde{u_4})$$

Mit $\dfrac{d}{d\zeta}\eta(u, u_4)$ bezeichne ich die Ableitung der Schockkurve bei festem u_4. Da die Entropiebedingung für $\eta(., \tilde{u}_4)$erfüllt ist, gilt

$$\frac{d}{d\zeta}\eta(u, u_4) \leq \frac{\dfrac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\dfrac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}} \quad .$$

für alle $u \in [u_1, u_4]$ und $v \in [u_1, u]$. Also ist die Entropiebedingung auch für $\eta(., u_4)$ erfüllt. Somit ist die Behauptung für alle $u_4 < p$ gezeigt. Falls $p < \infty$ ist, bleibt die Entropiebedingung für $\eta(., p)$ nachzuweisen. Es existiert eine Folge $(u_4^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset N$ mit $u_4^n \longrightarrow p$ für $n \longrightarrow \infty$. Sei nun $u \in [u_1, p)$. Dann ist $u < u_4^n$ für große n. $\eta(u, u_4^n)$ ist dann also definiert und erfüllt nach Voraussetzung die Entropiebedingung. Da $\frac{d\eta}{d\zeta}$ stetig vom Parameter u_4 abhängt (siehe 4.5), folgt

$$\frac{\frac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} - \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\frac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1} - \frac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \geq \frac{d}{d\zeta}\eta(u, u_4^n) \longrightarrow \frac{d}{d\zeta}\eta(u, p) \text{ für } n \longrightarrow \infty \quad .$$

Da außerdem $\frac{d}{d\zeta}\eta(p, p) = 0$ ist, ist die Entropiebedingung für alle $u \in [u_1, p]$ erfüllt. Damit ist Teil a) erledigt.

Im Fall $p = \infty$ ist die Behauptung gezeigt.

zu b): Nun betrachte ich den Fall $p < \infty$. Sei

$$M := \{\, u_4 \mid u_4 > u_1 \text{ und die Schockkurve } \eta(., u_4) \text{ verletzt die Entropiebedingung mit dem tangentialen Wert } \bar{v} = u_1 \}$$

und

$$q := \inf M \quad .$$

Falls $M = \emptyset$ sei $q := \infty$.

Behauptung: $p < q$.

Falls $q = \infty$ ist, folgt $p < q$. Im Fall $q < \infty$ muß ich, da $p \in N$, nur den Fall $p = q$ ausschließen. Ich zeige dazu, daß $q \in M$ ist. Angenommen $q \notin M$. Dann existiert eine monoton fallende Folge $(u_4^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $u_4^n \searrow q$. Zu jedem u_4^n existiert ein kritischer Entropiewert $\bar{u}_n$. Da $\frac{d}{d\zeta}\eta(u, .)$ monoton steigend ist, folgt aus der Entropiebedingung, daß die Folge $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Da die Folge außerdem nach unten durch u_1 beschränkt ist, existiert ein $\bar{q}$ mit $\bar{u}_n \searrow \bar{q}$ für $n \longrightarrow \infty$.

Behauptung: $\bar{q}$ ist kritischer Entropiewert zur Schockkurve $(\zeta, \eta(., q))$ und der tangentiale Wert ist u_1.

Die Entropiebedingung ist für $(\zeta, \eta(., q)$)im Intervall $(\bar{q}, q)$ erfüllt. Falls nicht, gibt es ein $\tilde{u} \in (\bar{q}, q)$, so daß die Entropiebedingung verletzt ist. Sei nun n so groß, daß $\tilde{u} > \bar{u}_n$. Aus der Monotonie von $\frac{d}{d\zeta}\eta(\tilde{u}, .)$ würde folgen, daß die Entropiebedingung auch für $(\zeta, \eta)(\tilde{u}, u_4^n)$ nicht erfüllt ist. Ein Widerspruch zu $\tilde{u} > \bar{u}_n$.

Um nachzuweisen, daß $\bar{q}$ kritischer Entropiewert ist, verbleibt zu zeigen, daß die Entropiebedingung in einem Intervall $(\bar{q} - \varepsilon, \bar{q})$ (für ein $\varepsilon > 0$) verletzt ist. Um dies zu beweisen, zeige ich:

Behauptung: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\frac{d}{d\zeta}\eta(u,q) > \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}} \quad \text{für } u \in (\bar{q}-\varepsilon, \bar{q}).$$

Zusammen mit Satz 4.13.3 (für $v = u_1$) folgt daraus, daß die Entropiebedingung verletzt wird. Ich zeige die Behauptung, indem ich

$$\frac{d}{d\zeta}\eta(u,q) \overset{(1)}{>} \frac{d}{d\zeta}\eta(\bar{q},q) \overset{(2)}{=} \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{q})-g(u_1)}{\bar{q}-u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{q})-f(u_1)}{\bar{q}-u_1}} \overset{(3)}{>} \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}}$$

für $u < \bar{q}$ in der Nähe von $\bar{q}$ nachweise.

(1) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\frac{d}{d\zeta}\eta(u,q) > \frac{d}{d\zeta}\eta(\bar{q},q)$ für alle $u \in (\bar{q}-\varepsilon, \bar{q})$.

Wegen Bemerkung 4.6 genügt es zu zeigen, daß $\eta(\bar{q},q) < g'(\bar{q})$ und damit $\frac{d^2}{d\zeta^2}\eta(\bar{q},q) < 0$ ist.

Aus 4.13.3 (für $v = u$) folgt:

$$\frac{\eta(\bar{q},q) - \dfrac{g(\bar{q})-g(u_1)}{\bar{q}-u_1}}{f'(\bar{q}) - \dfrac{f(\bar{q})-f(u_1)}{\bar{q}-u_1}} = \frac{d}{d\zeta}\eta(\bar{q},q) \leq \frac{g'(\bar{q}) - \dfrac{g(\bar{q})-g(u_1)}{\bar{q}-u_1}}{f'(\bar{q}) - \dfrac{f(\bar{q})-f(u_1)}{\bar{q}-u_1}}$$

Damit gilt $\eta(\bar{q},q) \leq g'(\bar{q})$. *Angenommen* $\eta(\bar{q},q) = g'(\bar{q})$. Dann folgt mit $\sigma(u) := \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}$ und $\rho(u) := \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}$ aus der Entropiebedingung, daß

$$\frac{d\rho}{d\sigma}(\bar{q}) = \frac{g'(\bar{q}) - \dfrac{g(\bar{q})-g(u_1)}{\bar{q}-u_1}}{f'(\bar{q}) - \dfrac{f(\bar{q})-f(u_1)}{\bar{q}-u_1}} = \frac{d}{d\zeta}\eta(\bar{q},q) \leq \frac{\dfrac{g(v)-g(u_1)}{v-u_1} - \dfrac{g(\bar{q})-g(u_1)}{\bar{q}-u_1}}{\dfrac{f(v)-f(u_1)}{v-u_1} - \dfrac{f(\bar{q})-f(u_1)}{\bar{q}-u_1}} = \frac{\rho(\bar{q})-\rho(v)}{\sigma(\bar{q})-\sigma(v)}$$

für alle $v \in [u_1, \bar{q}]$. Daraus folgt aber

$$\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}(\bar{q}) \leq 0 \quad .$$

Aus Lemma 4.13 folgt

$$\frac{g''}{f''}(\bar{q}) - \frac{g'(\bar{q}) - \dfrac{g(\bar{q})-g(u_1)}{\bar{q}-u_1}}{f'(\bar{q}) - \dfrac{f(\bar{q})-f(u_1)}{\bar{q}-u_1}} \leq 0 \quad .$$

Ein Widerspruch zu $\bar{q} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\bar{u}_n}_{\geq w_2} \geq w_2 > w_1$.

(2) Aus Lemma 4.12 folgt

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}_n, u_4^n) = \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{u}_n) - g(u_1)}{\bar{u}_n - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{u}_n) - f(u_1)}{\bar{u}_n - u_1}} \quad .$$

Da $u_4^n \longrightarrow q$ und $\bar{u}_n \longrightarrow \bar{q}$ und $\dfrac{d\eta}{d\zeta}(u, u_4)$ stetig von u und u_4 abhängt, folgt damit (2).

(3) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{q}) - g(u_1)}{\bar{q} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{q}) - f(u_1)}{\bar{q} - u_1}} > \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \quad \text{für alle } u \in (\bar{q} - \varepsilon, \bar{q}).$$

Es gilt:

$(*)$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g'(u_1) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}}\right)_{|\bar{q}} = \frac{(f'(u_1) - \triangle f)\left(-\dfrac{g'(\bar{q}) - \triangle g}{\bar{q} - u_1}\right) - (g'(u_1) - \triangle g)\left(-\dfrac{f'(\bar{q}) - \triangle f}{\bar{q} - u_1}\right)}{(f'(u_1) - \triangle f)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\bar{q} - u_1}}_{>0} \underbrace{\frac{f'(\bar{q}) - \triangle f}{f'(u_1) - \triangle f}}_{<0} \underbrace{\left(\frac{g'(u_1) - \triangle g}{f'(u_1) - \triangle f} - \frac{g'(\bar{q}) - \triangle g}{f'(\bar{q}) - \triangle f}\right)}_{<0} > 0$$

Dabei seien $\triangle f := \dfrac{f(\bar{q}) - f(u_1)}{\bar{q} - u_1}$ und $\triangle g := \dfrac{g(\bar{q}) - g(u_1)}{\bar{q} - u_1}$. Aus der Konvexität von f folgt:

$$\frac{f'(\bar{q}) - \triangle f \bar{q} u_1}{f'(u_1) - \triangle f \bar{q} u_1} = \frac{f'(\bar{q}) - \dfrac{f(\bar{q}) - f(u_1)}{\bar{q} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{q}) - f(u_1)}{\bar{q} - u_1}} < 0$$

Aus $\eta(\bar{q}, q) < g'(\bar{q})$ zusammen mit (2) folgt:

$$\frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{q}) - g(u_1)}{\bar{q} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{q}) - f(u_1)}{\bar{q} - u_1}} = \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{q}, q) = \frac{\eta(\bar{q}, q) - \dfrac{g(\bar{q}) - g(u_1)}{\bar{q} - u_1}}{f'(\bar{q}) - \dfrac{f(\bar{q}) - f(u_1)}{\bar{q} - u_1}} < \frac{g'(\bar{q}) - \dfrac{g(\bar{q}) - g(u_1)}{\bar{q} - u_1}}{f'(\bar{q}) - \dfrac{f(\bar{q}) - f(u_1)}{\bar{q} - u_1}}$$

Damit ist $(*)$ gezeigt. Aus $(*)$ folgt dann die Behauptung (3).

Damit ist gezeigt, daß ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß die Entropiebedingung für $u \in (\bar{q} - \varepsilon, \bar{q})$ verletzt wird. $\bar{q}$ ist somit der kritische Entropiewert zu q. Aus Korollar 5.6 folgt, da u_1 tangentialer Wert zu $\bar{u}_n$, daß $\bar{u}_n \geq w_2$ ist. Somit ist also $\bar{q} = \lim\limits_{n \to \infty} \bar{u}_n \geq w_2$ und damit ist u_1 tangentialer Wert zu $\bar{q}$. Damit ist also $p < q$ gezeigt.

zu c): Im folgenden konstruiere ich die Lösung im Fall $u_4 \in (p,q)$. Nach Definition von p und q gilt für $u_4 \in (p,q)$, daß die Entropiebedingung von der zugehörigen Schockkurve verletzt wird und der kritische Entropiewert $\bar{u}(u_4)$ einen tangentialen Wert $\bar{v}(u_4) \in (u_1, \bar{u}(u_4)]$ besitzt. Wegen Lemma 5.7 kann auch $\bar{v} = \bar{u}$ ausgeschlossen werden. Das folgende Lemma liefert die Existenz der Enveloppewelle (siehe Abbildung 5.2). Ich setze den Schock (ζ, η) von $\bar{u}$ aus fort und lasse tangential aus ihm Charakteristiken loslaufen, deren Werte gewährleisten, daß die Entropiebedingung erfüllt ist.

5.8 Lemma

Sei $u_4 \in (p,q)$. Sei $\bar{u}$ der kritische Entropiewert und $\bar{v}$ der zugehörige tangentiale Wert. Dann existiert ein $\tilde{u} \in (\bar{v}, \bar{u})$ und Funktionen $\eta_E, u_- \in C^1([\tilde{u}, \bar{u}])$, so daß gilt:

1.) Für alle $u \in (\tilde{u}, \bar{u})$ gilt:

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) \overset{(A)}{=} \frac{\eta_E(u) - \dfrac{g(u) - g(u_-(u))}{u - u_-(u)}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_-(u))}{u - u_-(u)}} \overset{(B)}{=} \frac{g'(u_-(u)) - \dfrac{g(u_-(u)) - g(u)}{u_-(u) - u}}{f'(u_-(u)) - \dfrac{f(u_-(u)) - f(u)}{u_-(u) - u}} \quad .$$

2.) η_E und u_- erfüllen die Anfangsbedingungen

$$\eta_E(\bar{u}) = \eta(\bar{u}, u_4) \quad \text{und} \quad u_-(\bar{u}) = \bar{v} \quad .$$

3.) Für alle $u \in (\tilde{u}, \bar{u})$ gilt

$$\frac{du_-}{d\zeta}(u) < 0 \quad , \quad \frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) > 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2\eta_E}{d\zeta^2}(u) < 0 \quad .$$

4.) Im Punkt $\tilde{u}$ gilt

$$u_-(\tilde{u}) = \tilde{u} \quad , \quad \eta_E(\tilde{u}) = g'(\tilde{u}) \quad \text{und} \quad \frac{d\eta_E}{d\zeta}(\tilde{u}) = \frac{g''}{f''}(\tilde{u}) \quad .$$

Beweis:

Um die gesuchten Funktionen η_E und u_- zu bestimmen, löse ich die Algebro-Differentialgleichung 1.) mit den Anfangswerten aus 2.). Aus Lemma 4.11 folgt, daß

$$\frac{\eta_E(\bar{u}) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_-)}{\bar{u} - u_-}}{f'(\bar{u}) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_-)}{\bar{u} - u_-}} = \frac{g'(u_-) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_-)}{\bar{u} - u_-}}{f'(u_-) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_-)}{\bar{u} - u_-}} \qquad (\text{ da } u_-(\bar{u}) = \bar{v}) \quad .$$

Die Identität (B) ist also im Anfangspunkt erfüllt. Ich löse die Gleichung 1.), indem ich (B) differenziere und eine Differentialgleichung für u_- herleite. Zusammen mit (A) erhalte ich ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für η_E und u_-. Im folgenden seien

$$\Delta f(u, u_-) = \frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} \quad \text{und} \quad \Delta g(u, u_-) = \frac{g(u) - g(u_-)}{u - u_-} \quad .$$

Es ist

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\eta_E(u)-\dfrac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}}{\zeta(u)-\dfrac{f(u)-f(u_-)}{u-u_-}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\zeta(u)-\Delta f(u,u_-))^2}\left[\left(\frac{d\eta_E}{d\zeta}(u)-\frac{d}{d\zeta}\Delta g(u,u_-)\right)(\zeta(u)-\Delta f(u,u_-))-\right.$$

$$\left.(\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-))\left(1-\frac{d}{d\zeta}\Delta f(u,u_-)\right)\right]$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}\Delta g(u,u_-)&=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}\right)\\&=\frac{du}{d\zeta}\frac{d}{du}\left(\frac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}\right)+\frac{du_-}{d\zeta}\frac{d}{du_-}\left(\frac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}\right)\\&=\frac{du}{d\zeta}\left(\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{u-u_-}\right)-\frac{du_-}{d\zeta}\left(\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{u-u_-}\right)\quad.\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\frac{d}{d\zeta}\Delta f(u,u_-)=\frac{du}{d\zeta}\left(\frac{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}{u-u_-}\right)-\frac{du_-}{d\zeta}\left(\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{u-u_-}\right)\quad.$$

Nutzt man außerdem die Identität (A) ergibt sich

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\eta_E(u)-\dfrac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}}{\zeta(u)-\dfrac{f(u)-f(u_-)}{u-u_-}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(f'(u)-\Delta f(u,u_-))}\left[\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}-\frac{du}{d\zeta}\left(\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{u-u_-}\right)-\frac{du_-}{d\zeta}\left(\frac{\Delta g(u,u_-)-g'(u_-)}{u-u_-}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}+\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\left(\frac{du}{d\zeta}\left(\frac{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}{u-u_-}\right)+\frac{du_-}{d\zeta}\left(\frac{\Delta f(u,u_-)-f'(u_-)}{u-u_-}\right)\right)\right.$$

$$=\frac{du_-}{d\zeta}\frac{1}{u-u_-}\left(\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}-\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\cdot\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\right)+$$

$$+\frac{du}{d\zeta}\cdot\frac{1}{u-u_-}\left(-\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}+\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\right)$$

$=:(+)$

Weiterhin ist

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{g'(u_-)-\dfrac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}}{f'(u_-)-\dfrac{f(u)-f(u_-)}{u-u_-}}\right)=$$

$$= \frac{1}{(f'(u_-) - \Delta f(u,u_-))^2} \left[\left(g''(u_-)\frac{du_-}{d\zeta} - \frac{d}{d\zeta}\Delta g(u,u_-) \right) (f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)) \right.$$

$$\left. - \left(f''(u_-)\frac{du_-}{d\zeta} - \frac{d}{d\zeta}\Delta f(u,u_-) \right) (g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)) \right]$$

$$= \frac{\frac{1}{u-u_-}}{(f'(u_-) - \Delta f(u,u_-))} \left[g''(u_-)\frac{du_-}{d\zeta}(u-u_-) - \frac{du}{d\zeta}(g'(u) - \Delta g(u,u_-)) - \frac{du_-}{d\zeta}(\Delta g(u,u_-) - g'(u_-)) \right] -$$

$$- \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \left[\frac{f''(u_-)(u-u_-)\frac{du_-}{d\zeta}}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{du}{d\zeta}\frac{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}{f'(u_-)\Delta f(u,u_-)} + \frac{du_-}{d\zeta} \right]$$

$$= \frac{du_-}{d\zeta}\frac{1}{u-u_-} \left[\frac{g''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)}\frac{f''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \right] +$$

$$+ \frac{du}{d\zeta}\frac{1}{u-u_-} \left[-\frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} + \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \right]$$

$$=: (++)$$

Setzt man nun (+)=(++) multipliziert mit $(u-u_-)$ und sortiert nach $\frac{du}{d\zeta}$ bzw. $\frac{du_-}{d\zeta}$ ergibt sich:

$$\frac{du_-}{d\zeta} \left[\frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} + \frac{\eta_E(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} - \right.$$

$$(*) \qquad \left. - \frac{g''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} + \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)}\frac{f''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \right]$$

$$= \frac{du}{d\zeta} \left[-\frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} + \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} + \right.$$

$$\left. + \frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{\eta_E(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} \right]$$

Jetzt will ich die Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{du_-}{d\zeta} = \frac{du}{d\zeta}\frac{1}{f''(u_-)}\frac{f'(u) - f'(u_-)}{u-u_-} \left(\frac{K(u,u_-) + L(u,u_-,\eta_E)}{M(u,u_-) + N(u,u_-,\eta_E)} \right)$$

bringen. Dabei seien

$$K(u,u_-) = \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}$$

$$L(u,u_-,\eta_E) = \left(\frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{\eta_E(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} \right) \frac{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}$$

$$M(u,u_-) = \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g''}{f''}(u_-)$$

$$N(u,u_-,\eta_E) = \frac{(f'(u_-) - \Delta f(u,u_-))^2}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}\frac{1}{f''(u_-)(u-u_-)} \left(\frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{\eta_E(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} \right)$$

Es wird sich später zeigen, daß für die Lösung der Differentialgleichung $L(u,u_-,\eta_E) = N(u,u_-,\eta_E) = 0$ folgt. Außerdem sind die Ausdrücke K und M aus den vorherigen Untersuchungen über $\mathcal{S}_{u_1}$ bekannt. Diese Tatsache macht die obige Darstellung der Differentialgleichung sinnvoll. Nun betrachte ich die Ausdrücke in den eckigen Klammern in $(*)$.

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}+\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{g''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}+\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\frac{f''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\right]\\
&=\frac{f''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\left(\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}-\frac{g''}{f''}(u_-)\right)+\\
&\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\left(\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}-\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}+\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}-\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\right]\\
&=\frac{f'(u)-f'(u_-}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\left(-\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}+\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}\frac{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}-\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}\right)\\
&=\frac{f'(u)-f'(u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\left[-\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}+\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\right.\\
&\qquad\left.\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}-\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}\right]\\
&=\frac{f'(u)-f'(u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}\left[\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}-\frac{g'(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{g'(u_-)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}-\frac{\eta_E(u)-\Delta g(u,u_-)}{f'(u)-\Delta f(u,u_-)}\right)\frac{f'(u_-)-\Delta f(u,u_-)}{f'(u)-f'(u_-)}\right]
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die oben behauptete Gestalt der Differentialgleichung für u_-. Zu lösen ist jetzt also die folgende Anfangswertaufgabe

$$(A)\qquad \frac{d\eta_E}{d\zeta}(u)=\frac{\eta_E(u)-\dfrac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}}{f'(u)-\dfrac{f(u)-f(u_-)}{u-u_-}}$$

$$(B1)\qquad \frac{du_-}{d\zeta}=\frac{du}{d\zeta}\frac{1}{f''(u_-)}\frac{f'(u)-f'(u_-)}{u-u_-}\left(\frac{K(u,u_-)+L(u,u_-,\eta_E)}{M(u,u_-)+N(u,u_-,\eta_E)}\right)$$

$$\text{mit}\quad \eta_E(\bar{u})=\eta(\bar{u})\quad\text{und}\quad u_-(\bar{u})=\bar{v}\quad .$$

Im folgenden untersuche ich, ob die rechte Seite in (B1) singulär wird. Da (B) im Anfangspunkt erfüllt ist, ergibt sich

$$L(\bar{u},\bar{v},\eta_E(\bar{u}))=0 \quad \text{und} \quad N(\bar{u},\bar{v},\eta_E(\bar{u}))=0 \quad .$$

Nach Korollar 5.6 ist $\bar{v} < w_1$. Zusammen mit Lemma 4.11 folgt

$$\frac{g'(\bar{v})-\triangle g(\bar{v},\bar{u})}{f'(\bar{v})-\triangle f(\bar{v},\bar{u})}=\frac{g'(\bar{v})-\triangle g(\bar{v},u_1)}{f'(\bar{v})-\triangle f(\bar{v},u_1)}>\frac{g''}{f''}(\bar{v})$$

Somit gilt

$$M(\bar{u},\bar{v})>0$$

Die rechte Seite von (B1) ist also definiert. Da alle auftretenden Funktionen genügend glatt sind, folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf die Existenz einer eindeutigen Lösung. Macht man die Umformungen, die zur Differentialgleichung für u_- führten, rückgängig, ergibt sich:

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\eta_E(u)-\dfrac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}}{\zeta(u)-\dfrac{f(u)-f(u_-)}{u-u_-}}\right)=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{g'(u_-)-\dfrac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}}{f'(u_-)-\dfrac{f(u)-f(u_-)}{u-u_-}}\right)$$

Da die Identität (B) im Anfangspunkt erfüllt ist, folgt somit:

$$\frac{\eta_E(u)-\dfrac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}}{\zeta(u)-\dfrac{f(u)-f(u_-)}{u-u_-}})=\frac{g'(u_-)-\dfrac{g(u)-g(u_-)}{u-u_-}}{f'(u_-)-\dfrac{f(u)-f(u_-)}{u-u_-}}$$

Daraus folgt aber

$$L(u,u_-(u),\eta_E(u))=0 \quad \text{und} \quad N(u,u_-(u),\eta_E(u))=0$$

solange die Differentialgleichung lösbar ist.

Sei $(\omega,\bar{u}]$ das maximale Intervall nach links, in dem die Differentialgleichung lösbar ist. Außerdem sei

$$\rho := \inf\{\, u \mid M(u,u_-(u))>0 \,\} \quad .$$

Da $M(\bar{u},\bar{v})>0$ ist, folgt $\rho<\bar{u}$. Zunächst zeige ich für alle $u\in(max(\rho,\omega),\bar{u}]$

$$i)\quad \frac{du_-}{d\zeta}(u)<0 \quad , \quad ii)\quad \frac{d\eta_E}{d\zeta}(u)>0 \quad \text{und} \quad iii)\quad \frac{d^2\eta_E}{d\zeta^2}(u)<0 \quad .$$

Anschließend zeige ich dann, daß $M(u,u_-(u))>0$ solange $u_-<u$ gilt. Aus $\frac{du_-}{d\zeta}(u)<0$ folgt dann, daß die Differentialgleichung bis zu einem $\tilde{u}$ mit $u_-(\tilde{u})=\tilde{u}$ lösbar ist. Nach Voraussetzung ist $M(u,u_-)>0$. Aus dem folgenden Lemma folgt $K(u,u_-)<0$. Berücksichtigt man (B1), ergibt sich daraus, daß $\frac{du_-}{d\zeta}<0$ ist.

5.9 Lemma

Gegeben seien $v_1, v_2 \in I\!R$ mit $v_1 < v_2$ und $v_2 > a$. Außerdem gelte

$$\frac{g''}{f''}(v_1) - \frac{g'(v_1) - \Delta g(v_1, v_2)}{f'(v_1) - \Delta f(v_1, v_2)} < 0 \quad .$$

Dann gilt:

$$\frac{g'(v_1) - \Delta g(v_1, v_2)}{f'(v_1) - \Delta f(v_1, v_2)} < \frac{g'(v_2) - \Delta g(v_1, v_2)}{f'(v_2) - \Delta f(v_1, v_2)}$$

Beweis:

Sei $\tilde{\sigma}(w) := \dfrac{f(w) - f(v_2)}{w - v_2}$ und $\tilde{\rho}(w) := \dfrac{g(w) - g(v_2)}{w - v_2}$. Aus Lemma 4.14 und der Voraussetzung folgt:

$$\frac{d^2\tilde{\rho}}{d\tilde{\sigma}^2}(v_1) = \underbrace{\frac{(v_1 - v_2)f''(v_1)}{(f'(v_1) - \Delta f(v_1, v_2))^2}}_{<0} \underbrace{\left[\frac{g''}{f''}(v_1) - \frac{g'(v_1) - \Delta g(v_1, v_2)}{f'(v_1) - \Delta f(v_1, v_2)}\right]}_{<0} > 0$$

Analog zu Korollar 5.5 kann man zeigen, daß für $u > a$ ein $\tilde{w} < a$ existiert, so daß $(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho})$ konkav ist für $u < \tilde{w}$ und konvex für $u > \tilde{w}$. Da

$$\frac{d^2\tilde{\rho}}{d\tilde{\sigma}^2}(v_1) > 0$$

ist, muß $(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho})$ für $w \geq v_1$ konvex sein. Daraus folgt:

$$\frac{g'(v_1) - \Delta g(v_1, v_2)}{f'(v_1) - \Delta f(v_1, v_2)} = \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{\sigma}}(v_1) < \frac{\tilde{\rho}(v_2) - \tilde{\rho}(v_1)}{\tilde{\sigma}(v_2) - \tilde{\sigma}(v_1)} = \frac{g'(v_2) - \Delta g(v_1, v_2)}{f'(v_2) - \Delta f(v_1, v_2)}$$

q.e.d.

ii) $\dfrac{d\eta_E}{d\zeta}(u) > 0$

Dies folgt sofort aus

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) = \frac{g'(u_-) - \Delta g(u, u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u, u_-)}$$

wenn man die Konvexität von f und g ausnutzt.

iii) $\dfrac{d^2\eta_E}{d\zeta^2}(u) < 0$

In dem folgenden Lemma bestimme ich zunächst die zweite Ableitung.

5.10 Lemma

Für alle $u \in (\omega, \bar{u}]$ gilt

$$\frac{d^2\eta_E}{d\zeta^2}(u) = \frac{1}{(u-u_-)f''(u)} \left(\frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} \right) \quad .$$

Beweis:

Aus (A) und (B) folgt:

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) = \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)}$$

Die rechte Seite habe ich schon vorne ausdifferenziert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\eta_E}{d\zeta^2}(u) &= \frac{du_-}{d\zeta} \frac{1}{u-u_-} \left[\frac{g''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \frac{f''(u_-)(u-u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \right] + \\
&\quad + \frac{du}{d\zeta} \frac{1}{u-u_-} \left[-\frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} + \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \frac{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \right] \\
&= \frac{du_-}{d\zeta} \frac{f''(u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \left[\frac{g''(u_-)}{f''(u_-)} - \frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \right] + \\
&\quad + \frac{du}{d\zeta} \frac{1}{u-u_-} \frac{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \left[\frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} \right]
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\frac{du_-}{d\zeta} = \frac{du}{d\zeta} \frac{1}{f''(u_-)} \frac{f'(u) - f'(u_-)}{u-u_-} \left(\frac{K(u,u_-)}{M(u,u_-)} \right)$$

ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\eta_E}{d\zeta^2}(u) &= \frac{du}{d\zeta} \frac{1}{u-u_-} \frac{f'(u_-) - f'(u)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \left[\frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} \right] + \\
&\quad + \frac{du}{d\zeta} \frac{1}{u-u_-} \frac{f'(u) - \Delta f(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} \left[\frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} \right] \\
&= \frac{1}{f''(u)} \frac{1}{u-u_-} \left(\frac{g'(u_-) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u,u_-)} - \frac{g'(u) - \Delta g(u,u_-)}{f'(u) - \Delta f(u,u_-)} \right)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Für alle $u \in (\omega, \bar{u}]$ folgt damit aus Lemma 5.9

$$\frac{d^2\eta_E}{d\zeta^2}(u) < 0$$

Aus i) ergibt sich, daß u_- sich wie in Abbildung 5.7 dargestellt verhält. Ich will die Differentialgleichung lösen, bis $u_-(u)$ die Gerade $u_- = u$ schneidet.

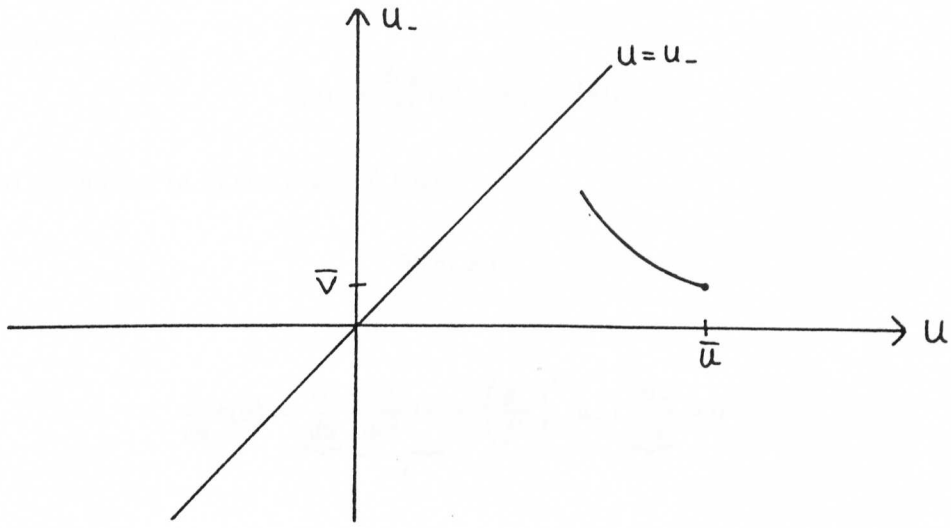


Abbildung 5.7

Solange $u_- < u$ gilt, folgt $\dfrac{du_-}{du} < 0$ und somit ist u_- auch nach unten beschränkt. Aus (B) folgt, daß auch η_E beschränkt bleibt. Falls

$$\frac{g'(u_-) - \Delta g(u, u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u, u_-)} - \frac{g''}{f''}(u_-) > 0$$

ist, für alle $u < \bar{u}$ mit $u_-(u) < u$, ist die Existenz von η_E und u_- bis zu einem Punkt $\tilde{u}$ mit $u_-(\tilde{u}) = \tilde{u}$ gezeigt. Da u und η_E beschränkt bleiben, ist die Differentialgleichung im Intervall $(\rho, \bar{u}]$ lösbar. Es genügt also zu zeigen, daß $\lim\limits_{u \searrow \rho} u_-(u) = \rho$ ist. Aus $u_-(u) < u$ für $u \in (\rho, \bar{u}]$ folgt

$$\lim_{u \searrow \rho} u_-(u) \leq \rho \quad .$$

Annahme: $\lim\limits_{u \searrow \rho} u_-(u) < \rho$.

Es gilt

$$\frac{g'(u_-) - \Delta g(u, u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u, u_-)} - \frac{g''}{f''}(u_-) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad u \searrow \rho \quad .$$

Es sei $\rho_- := u_-(\rho) = \lim\limits_{u \searrow \rho} u_-(\rho)$. Da

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) = \frac{g'(u_-) - \Delta g(u, u_-)}{f'(u_-) - \Delta f(u, u_-)} \quad \text{für} \quad u \in (\rho, \bar{u}]$$

folgt

$$(+) \qquad \frac{d\eta_E}{d\zeta}(\rho) = \frac{g'(\rho_-) - \Delta g(\rho, \rho_-)}{f'(\rho_-) - \Delta f(\rho, \rho_-)}$$

und somit

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(\rho) = \frac{g''}{f''}(\rho_-) \quad .$$

Es sei nun

$$h(u) := \frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) - \frac{g''}{f''}(u_-(u))$$

Da $h(u) > 0$ für $u \in (\rho, \bar{u}]$ und $h(\rho) = 0$ folgt

$$h'(\rho) > 0$$

Es ist

$$\frac{d}{du}h(u) = \underbrace{\frac{d\zeta}{du}}_{>0} \underbrace{\frac{d^2\eta_E}{d\zeta^2}(u)}_{<0} - \left(\frac{g''}{f''}\right)'(u_-) \underbrace{\frac{du_-}{du}}_{<0} > 0$$

Also folgt

$$\left(\frac{g''}{f''}\right)'(\rho_-) > 0$$

Also ist $\rho_- > a$ und somit gilt für alle $v > \rho_-$

$$\frac{g''}{f''}(v) > \frac{g''}{f''}(\rho_-) = \frac{d\eta_E}{d\zeta}(\rho) \quad .$$

Und damit

$$0 > \frac{d\eta_E}{d\zeta}(\rho)f''(v) - g''(v) \quad .$$

Sei $F(v) := \frac{d\eta_E}{d\zeta}(\rho)f(v) - g(v)$. Dann folgt $F''(v) < 0$ für $v > \rho_-$. Daraus ergibt sich

$$F'(\rho_-) > \frac{F(\rho_-) - F(v)}{\rho_- - v} \quad \text{für alle} \quad v > \rho_- \quad .$$

Für $v = \rho$ gilt somit

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(\rho)f'(\rho_-) - g'(\rho_-) > \frac{d\eta_E}{d\zeta}(\rho)\frac{f(\rho_-) - f(\rho)}{\rho_- - \rho} - \frac{g(\rho_-) - g(\rho)}{\rho_- - \rho} \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(\rho) < \frac{g'(\rho_-) - \dfrac{g(\rho_-) - g(\rho)}{\rho_- - \rho}}{f'(\rho_-) - \dfrac{f(\rho_-) - f(\rho)}{\rho_- - \rho}} \quad ,$$

ein Widerspruch zu (+).

Damit ist gezeigt, daß $u_-(\rho) = \rho$. Setze $\tilde{u} = \rho$. Die Behauptungen 1.)–3.) aus Lemma 5.8 sind damit nachgewiesen. Außerdem gilt $u_-(\tilde{u}) = \tilde{u}$.

Es ist

$$\lim_{u \searrow \tilde{u}} \frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) = \lim_{u \searrow \tilde{u}} \frac{g'(u_-) - \dfrac{g(u) - g(u_-)}{u - u_-}}{f'(u_-) - \dfrac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-}} = \lim_{u \searrow \tilde{u}} \frac{g''(\theta_1(u, u_-))\dfrac{u_- - u}{2}}{f''(\theta_2(u, u_-))\dfrac{u_- - u}{2}}$$

mit $\theta_1(u, u_-), \theta_2(u, u_-) \in (u_-, u)$. Daraus folgt

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(\tilde{u}) = \frac{g''}{f''}(\tilde{u}) \quad .$$

Aus

$$\frac{g''}{f''}(\tilde{u}) = \frac{d\eta_E}{d\zeta}(\tilde{u}) = \lim_{u \searrow \tilde{u}} \frac{\eta_E(u) - \dfrac{g(u) - g(u_-)}{u - u_-}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-}}$$

folgt dann, daß $\lim\limits_{u \searrow \tilde{u}} \eta_E(u) = g'(\tilde{u})$. Ansonsten würde der Limes nicht existieren. Damit sind sämtliche Aussagen des Lemmas 5.8 nachgewiesen.

∎

Mit diesem Lemma ist die Existenz der Enveloppewelle aus Abbildung 5.2 nachgewiesen. Dabei sorgt die Identität (A) dafür, daß die Sprungbedingung erfüllt ist. (B) gewährleistet, daß die aus dem Schock laufenden Geraden Charakteristiken sind und somit die Differentialgleichung in der Enveloppewelle stark erfüllt ist (siehe Bemerkung 3.5). Da $\dfrac{du_-}{du} < 0$ ist, nehmen die Werte von u_- mit fallendem u zu. Zusammen mit $\dfrac{d^2\eta_E}{d\zeta^2} < 0$ folgt, daß die Welle wohldefiniert ist. Im Punkt $\tilde{u}$ degeneriert die Schockstärke zu Null und der auslaufende Schock schneidet die Basiskurve mit erster Ordnung.

Im Punkt $(f'(u), g'(u))$ $(u \in [\bar{v}, \tilde{u}))$ schneidet die Charakteristik mit dem Wert u aus der Enveloppewelle die Charakteristik mit dem Wert u aus der Verdünnungswelle $VX[u_4, u_1]$. Es bleibt nachzuweisen, daß die Entropiebedingung erfüllt ist. Zunächst betrachte ich den Schock zwischen u_1 und $\bar{v}$. Im Punkt $(\zeta(\bar{u}), \eta(\bar{u}))$ erfüllt der Sprung zwischen u_1 und $\bar{u}$ die Entropiebedingung. Das bedeutet, daß der Graph der Funktion

$$F(v) := \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) f(v) - g(v)$$

zwischen u_1 und $\bar{u}$ oberhalb der Sekanten zwischen diesen beiden Punkten liegen muß. Da nach Lemma 4.8

$$\frac{F(\bar{u}) - F(u_1)}{\bar{u} - u_1} = \frac{F(\bar{v}) - F(u_1)}{\bar{v} - u_1} \quad ,$$

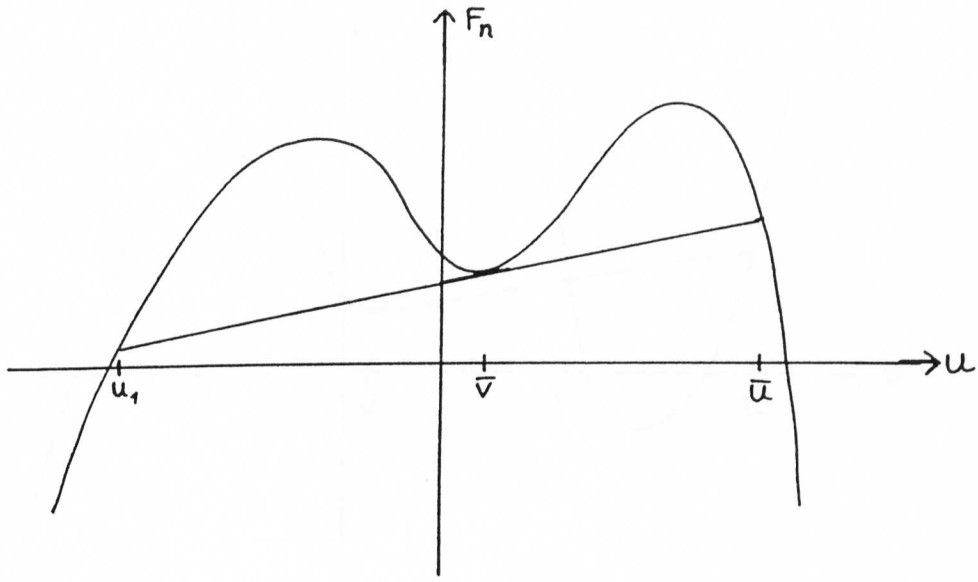


Abbildung 5.8

ist die Entropiebedingung dann auch für den Schock zwischen u_1 und $\bar{v}$ erfüllt, da sich der Schock mit der gleichen Steigung fortsetzt (siehe Abbildung 5.8).

Um die Entropiebedingung für die Schockkurve (ζ, η_E) nachzuweisen, betrachte ich folgende Formulierung der Entropiebedingung

$$\frac{F(v) - F(u_-)}{v - u_-} \geq \frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} \quad \text{für alle} \quad v \in [u_-, u].$$

Dabei sei $F(v) := \frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) f(v) - g(v)$. Ich will zunächst untersuchen, welche Gestalt F hat.

Es gilt

$$F''(v) > 0 \iff \frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) > \frac{g''}{f''}(v)$$

$$F''(v) < 0 \iff \frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) < \frac{g''}{f''}(v)$$

Da $\frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) > \frac{g''}{f''}(u_-)$, folgt aus der Voraussetzung an die Ableitung von $\frac{g''}{f''}$ die Existenz von w_1, w_2 mit $-\infty \leq w_1 < u_-$ und $u_- < w_2 \leq \infty$, so daß

$$(\#) \qquad F''(v) < 0 \iff v > w_2 \quad \text{oder} \quad v < w_1 \quad .$$

Annahme: Die Entropiebedingung ist verletzt.

Da

$$F'(u_-) = \frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} \quad \text{und} \quad F''(u_-) > 0 \quad ,$$

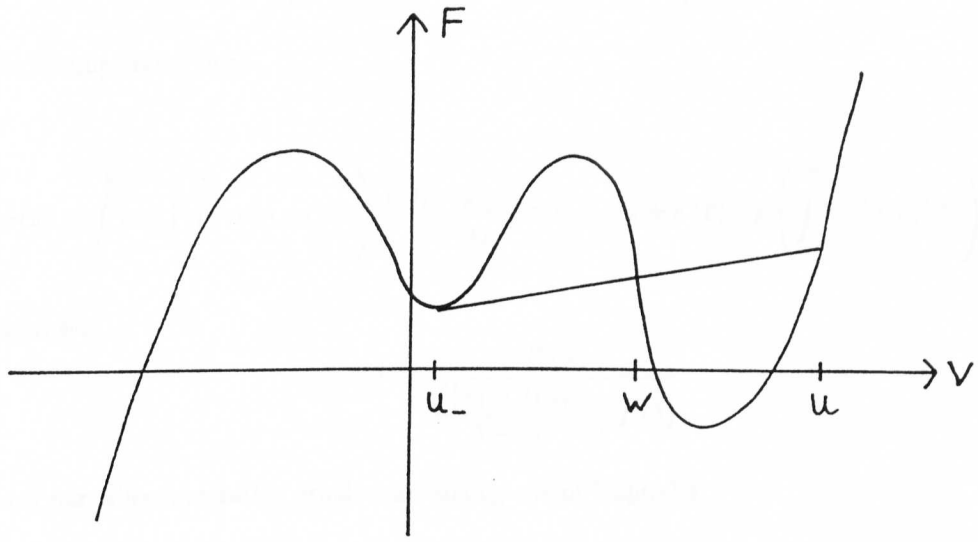


Abbildung 5.9

liegt der Graph von F in einer Umgebung von u_- oberhalb der Sekanten zwischen u und u_- (siehe Abbildung 5.9).

Da ich annehme, daß die Entropiebedingung verletzt ist, gibt es ein $w \in (u_-, u)$ mit

$$\frac{F(w) - F(u_-)}{w - u_-} = \frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} = \frac{F(w) - F(u)}{w - u} \quad \text{(siehe Abbildung 5.9)}$$

Also gibt es $\tilde{w} \in (u_-, w)$ und $\bar{w} \in (w, u)$, so daß

$$\frac{F(w) - F(u_-)}{w - u_-} = F'(\tilde{w}) \quad \text{und}$$

$$\frac{F(u) - F(w)}{u - w} = F'(\bar{w}) \quad .$$

Außerdem folgt aus (A) und (B), daß

$$F'(u_-) = \frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-}$$

Damit erhält man

$$F'(u_-) = F'(\tilde{w}) = F'(\bar{w}) \quad .$$

Daraus folgt die Existenz von zwei Nullstellen von F'' im Intervall $(u_-, \bar{w})$. Ein Widerspruch zu (#). Damit ist die Entropiebedingung für die Kurve (ζ, η_E) nachgewiesen.

Der weitere Ansatz wird sein, den Schock zwischen u_1 und $\bar{v}$ über den Punkt $(f'(\bar{v}), g'(\bar{v}))$ hinaus fortzusetzen. Wie oben ergibt sich aus der Sprungbedingung folgende Differentialgleichung für die Schockkurve. Die zu konstruierende Schockkurve sei mit (ζ, η_F) bezeichnet.

$$\frac{d\eta_F}{d\zeta}(u) = \frac{\eta_F(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\zeta(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}}$$

$$\text{mit} \quad \zeta(u) = f'(u) \quad \text{und} \quad \eta_F(\bar{v}) = g'(\bar{v}).$$

Als Lösung ergibt sich

$$\eta_F(u) = \int_{\bar{v}}^{u} exp\left(\int_{s}^{u} -a(\lambda, u_1)d\lambda\right) \frac{g(s) - g(u_1)}{s - u_1} a(s, u_1)ds + g'(\bar{v})exp\left(\int_{\bar{v}}^{u} -a(\lambda, u_1)d\lambda\right) \quad .$$

Dabei sei

$$a(\lambda, u_1) := \frac{f''(\lambda)}{\dfrac{f(\lambda) - f(u_1)}{\lambda - u_1} - f'(\lambda)} \quad .$$

Nach partieller Integration erhält man analog wie in Kapitel 4

$$(*) \quad \begin{aligned} \eta_F(u) = \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} &+ \int_{u}^{\bar{v}} exp\left(\int_{u}^{s} a(\lambda, u_1)d\lambda\right) \frac{d}{ds}\left(\frac{g(s) - g(u_1)}{s - u_1}\right) ds \\ &+ exp\left(\int_{\bar{v}}^{u} -a(\lambda, u_1)d\lambda\right)\left[g'(\bar{v}) - \frac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1}\right] \quad \text{für alle } u \in (u_1, \bar{v}]. \end{aligned}$$

Das folgende Lemma zeigt, daß die oben konstuierte Schockkurve (ζ, η_F) die in Abbildung 5.2 skizzierte Gestalt hat.

5.11 Lemma

Die oben konstruierte Funktion η_F hat die folgenden Eigenschaften:

1.) $\lim\limits_{u \searrow u_1} \eta_F(u) = g'(u_1)$ und $\lim\limits_{u \searrow u_1} \dfrac{d\eta_F}{d\zeta}(u) = \dfrac{g''}{f''}(u_1)$,

2.) $\dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} < \eta_F(u) < g'(u)$, für $u \in (u_1, \bar{v})$,

3.) $\dfrac{d\eta_F}{d\zeta}(u) > 0$, für $u \in (u_1, \bar{v})$,

4.) $\dfrac{d^2\eta_F}{d\zeta^2}(u) < 0$, für $u \in (u_1, \bar{v})$.

Außerdem erfüllt die Kurve (ζ, η_F) die Entropiebedingung.

Beweis:

zu 1.): Nach Hilfssatz 4.5.3 gilt

$$(+) \quad \begin{aligned} &\frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} + \int_{u}^{\bar{v}} exp\left(\int_{u}^{s} a(\lambda, u_1)d\lambda\right) \frac{d}{ds}\left(\frac{g(s) - g(u_1)}{s - u_1}\right) ds \\ &= g'(u) - \frac{1}{3}\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u_1)f''(u_1)(u - u_1)^2 ln(u - u_1) + \mathcal{O}((u - u_1)^2) \quad . \end{aligned}$$

Behauptung:

$$(++) \qquad exp\left(\int_{\bar{v}}^{u} -a(\lambda,u_1)d\lambda\right)\left[g'(\bar{v}) - \frac{g(\bar{v})-g(u_1)}{\bar{v}-u_1}\right] \quad = \mathcal{O}((u-u_1)^2)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
a(\lambda,u_1) &= \frac{f''(\lambda)}{\dfrac{f(\lambda)-f(u_1)}{\lambda-u_1} - f'(\lambda)} \\
&= \frac{f''(\lambda)}{1/2f''(\lambda)(u_1-\lambda)+1/6f'''(\lambda)(u_1-\lambda)^2+\mathcal{O}((\lambda-u_1)^3)} \\
&= \frac{1}{1/2(u_1-\lambda)+1/6\dfrac{f'''(\lambda)}{f''(\lambda)}(u_1-\lambda)^2+\mathcal{O}((\lambda-u_1)^3)} \\
&= \frac{2}{u_1-\lambda} - \frac{2}{3}\frac{f'''(\lambda)}{f''(\lambda)} + \mathcal{O}(\lambda-u_1) \quad .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
exp\left(\int_{\bar{v}}^{u} -a(\lambda,u_1)d\lambda\right) &= exp\left(\int_{\bar{v}}^{u} \frac{2}{\lambda-u_1} + \frac{2}{3}\underbrace{\frac{f'''(\lambda)}{f''(\lambda)}}_{=(ln\ f''(\lambda))'} + \mathcal{O}(\lambda-u_1)\,d\lambda\right) \\
&= exp\left(2ln\frac{u-u_1}{\bar{v}-u_1} + \frac{2}{3}ln\frac{f''(u)}{f''(\bar{v})}\right)\underbrace{exp\left(\int_{\bar{v}}^{u}\mathcal{O}(\lambda-u_1)\,d\lambda\right)}_{\substack{\leq C \\ C \text{ unabh. von u}}} \\
&\leq C\left(\frac{u-u_1}{\bar{v}-u_1}\right)^2\left(\frac{f''(u)}{f''(\bar{v})}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \tilde{C}(u-u_1)^2
\end{aligned}$$

Daraus folgt (++). Benutzt man die Darstellung von η_F aus (*), ergibt sich aus (+) und (++)

$$\lim_{u\searrow u_1} \eta_F(u) = g'(u_1)$$

Aus $(*)$,$(+)$ und $(++)$ folgt

$$\lim_{u \searrow u_1} \frac{d\eta_F}{d\zeta}(u) = \lim_{u \searrow u_1} \frac{\eta_F(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\zeta(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}}$$

$$= \lim_{u \searrow u_1} \left(\underbrace{\frac{g'(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}}}_{\longrightarrow \frac{g''(u_1)}{f''(u_1)}} + \underbrace{C \frac{(u - u_1)^2 ln(u - u_1) + \mathcal{O}((u - u_1)^2)}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}}}_{\longrightarrow 0} \right)$$

$$= \frac{g''(u_1)}{f''(u_1)} \quad .$$

zu 2.) und 3.):

$$\eta_F(u) - \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} = \int_u^{\bar{v}} exp\left(\int_u^s a(\lambda, u_1) d\lambda \right) \underbrace{\frac{d}{ds}\left(\frac{g(s) - g(u_1)}{s - u_1} \right)}_{\substack{> 0 \text{ für } s > u_1 \\ \text{,da } g'' > 0}} ds$$

$$+ exp\left(\int_{\bar{v}}^u -a(\lambda, u_1) d\lambda \right) \underbrace{\left[g'(\bar{v}) - \frac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1} \right]}_{\substack{> 0, \text{ da } \bar{v} > u_1 \\ \text{und } g \text{ konvex}}} > 0$$

Also ist

$$\eta_F(u) > \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} \quad .$$

Damit folgt

$$\frac{d\eta_F}{d\zeta}(u) = \frac{\eta_F(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} > 0 \quad \text{für} \quad u \in (u_1, \bar{v}]$$

Damit ist 3.) gezeigt.

Im Anfangspunkt $\bar{v}$ gilt $\eta_F(\bar{v}) = g'(\bar{v})$. Da $\bar{v} < w_1$ folgt

$$\frac{g''}{f''}(\bar{v}) < \frac{g'(\bar{v}) - \dfrac{g(\bar{v}) - g(u_1)}{\bar{v} - u_1}}{f'(\bar{v}) - \dfrac{f(\bar{v}) - f(u_1)}{\bar{v} - u_1}} = \frac{d\eta_F}{d\zeta}(\bar{v}) \quad .$$

Daraus folgt

$$\eta_F(u) < g'(u) \quad \text{für } u \in (\bar{w}, \bar{v}) \text{ für ein } \bar{w} \in (u_1, \bar{v}).$$

Annahme: Es existiert ein $w \in (u_1, \bar{w})$, so daß $\eta_F(w) = g'(w)$.
Sei nun $\tilde{w}$ der größte Wert mit $\eta_F(\tilde{w}) = g'(\tilde{w})$. Dann gilt in $\tilde{w}$

$$\frac{g'(\tilde{w}) - \dfrac{g(\tilde{w}) - g(u_1)}{\tilde{w} - u_1}}{f'(\tilde{w}) - \dfrac{f(\tilde{w}) - f(u_1)}{\tilde{w} - u_1}} = \frac{d\eta_F}{d\zeta}(\tilde{w}) \leq \frac{g''}{f''}(\tilde{w})$$

im Widerspruch zu $\tilde{w} < \bar{v} < w_1$. Also gilt $\eta_F(u) < g'(u)$ für alle $u \in [u_1, \bar{v}]$.

zu 4.): Nach Hilfssatz 4.5 gilt

$$\frac{d^2\eta_F}{d\zeta^2}(u) = \underbrace{\frac{1}{f''(u)} \frac{\dfrac{1}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}}}_{>0 \text{ da } f''>0} \underbrace{(\eta_F(u) - g'(u))}_{<0} < 0$$

für alle $u \in (u_1, \bar{v})$. Die Entropiebedingung ist erfüllt, falls

$$\frac{d\eta_F}{d\zeta}(u) \leq \frac{\dfrac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\dfrac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \text{ für alle } v \in [u_1, u] \text{ und alle } u \in [u_1, \bar{v}].$$

Da $\bar{v} < w_1$ ist, ist die Kurve $(\sigma(u), \rho(u)) := \left(\dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}, \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}\right)$ im Intervall $[u_1, \bar{v}]$ konkav (siehe Lemmata 4.14 und 5.4).
Also ist

$$\min_{v \in [u_1, u]} \frac{\rho(v) - \rho(u)}{\sigma(v) - \sigma(u)} = \frac{\rho'(u)}{\sigma'(u)} = \frac{g'(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \text{ für alle } u \in (u_1, \bar{v}).$$

Da $\eta_F(u) < g'(u)$, folgt

$$\frac{d\eta_F}{d\zeta}(u) = \frac{\eta_F(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} < \frac{g'(u) - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}} \leq \frac{\rho(v) - \rho(u)}{\sigma(v) - \sigma(u)} = \frac{\dfrac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1}}{\dfrac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1} - \dfrac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1}}$$

für alle $u \in (u_1, \bar{v})$ und $v \in [u_1, u]$. Damit ist die Entropiebedingung gezeigt.

q.e.d.

Falls $q = \infty$ ist, ist die Behauptung gezeigt.

zu d): Jetzt betrachte ich den Fall $q < \infty$.

Behauptung: Für alle $u_4 \geq q$ gilt:

i) die Entropiebedingung für die zu u_4 gehörige Schockkurve $(\zeta, \eta(., u_4))$ ist verletzt und

ii) der tangentiale Wert $\bar{v}(u_4)$ ist gleich u_1.

Da $q > p$ ist, ist die Entropiebedingung für die zu $u_4 > q$ gehörige Schockkurve verletzt. In b) habe ich gezeigt, daß der tangentiale Wert $\bar{v}(q)$ zum Riemannproblem mit $u_4 = q$ gleich u_1 ist. Aus Korollar 5.6 folgt dann, daß für den kritischen Entropiewertwert $\bar{u}(q)$ gilt

$$\bar{u}(q) \geq w_2$$

und somit

$$\frac{g''}{f''}(u_1) - \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{q}) - g(u_1)}{\bar{q} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{q}) - f(u_1)}{\bar{q} - u_1}} \leq 0 \quad .$$

Wie in b) gezeigt wurde, ist $\bar{u}$ streng monoton steigend. Also folgt aus $u_4 > q$, daß $\bar{u}(u_4) > \bar{u}(q) \geq w_2$ ist. Aus Korollar 5.6 folgt

$$\bar{v}(u_4) = u_1.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Die Behauptung des Satzes ist, daß die Entropielösung die Gestalt (C) hat. Nach Lemma 4.12 gilt

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{\eta(\bar{u}) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(\bar{u}) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} = \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}}$$

und

$$(\#) \qquad \frac{g''}{f''}(u_1) \leq \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} \quad .$$

Falls in der letzten Ungleichung echt kleiner gilt, kann ich die gleiche Konstruktion wie im Beweis zum Lemma 5.8 durchführen. In diesem Fall habe ich also die behauptete Gestalt der Lösung nachgewiesen. Die Gleichheit in (#) wird nur für $\bar{u} = w_2$ angenommen. In diesem Fall wird die Differentialgleichung (B1) singulär. Um die Algebro-Differentialgleichung

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(u) \overset{(A)}{=} \frac{\eta_E(u) - \dfrac{g(u) - g(u_-)}{u - u_-}}{f'(u) - \dfrac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-}} \overset{(B)}{=} \frac{g'(u_-) - \dfrac{g(u_-) - g(u)}{u_- - u}}{f'(u_-) - \dfrac{f(u_-) - f(u)}{u_- - u}}$$

im Fall $\bar{u} = w_2$ zu lösen, werde ich u_- als abhängige Variable auffassen und ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für u und η_E herleiten. Es ergibt sich

$$\frac{d\eta_E}{d\zeta}(u(u_-)) = \frac{\frac{d\eta_E}{du_-}(u(u_-))}{\frac{d\zeta}{du_-}(u(u_-))} = \frac{\eta_E(u(u_-)) - \frac{g(u(u_-)) - g(u_-)}{u(u_-) - u_-}}{f'(u(u_-)) - \frac{f(u(u_-)) - f(u_-)}{u(u_-) - u_-}} \quad .$$

Daraus folgt mit $\frac{d\zeta}{du_-} = \frac{d\zeta}{du}\frac{du}{du_-} = f''(u)\frac{du}{du_-}$, daß

$$\text{(A1)} \qquad \frac{d\eta_E}{du_-}u_- = f''(u)\frac{du}{du_-}\frac{\eta_E(u(u_-)) - \frac{g(u(u_-)) - g(u_-)}{u(u_-) - u_-}}{f'(u(u_-)) - \frac{f(u(u_-)) - f(u_-)}{u(u_-) - u_-}}$$

Aus (B) ergibt sich, wie in c) durch differenzieren nach ζ

$$\frac{du_-}{d\zeta}(M(u,u_-) + N(u,u_-,\eta_E)) = \frac{du}{d\zeta}\left(\frac{1}{f''(u_-)}\frac{f'(u) - f'(u_-)}{u - u_-}(K(u,u_-) + L(u,u_-,\eta_E))\right)$$

und somit

$$\text{(B2)} \qquad \frac{du}{du_-} = f''(u_-)\frac{u - u_-}{f'(u) - f'(u_-)}\frac{M(u,u_-) + N(u,u_-,\eta_E)}{K(u,u_-) + L(u,u_-,\eta_E)}$$

Es ist zu zeigen, daß die rechte Seite nichtsingulär ist. Da (B) im Anfangspunkt erfüllt ist, folgt $L(\bar{u}, u_1, \eta_E) = 0$. Sei $F(v) := \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u})f(v) - g(v)$. Aus

$$\text{(C)} \qquad \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) = \frac{g'(u_1) - \frac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(u_1) - \frac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} = \frac{g''}{f''}(u_1)$$

folgt

$$F''(u_1) = 0 \quad .$$

Jetzt untersuche ich, welche Gestalt F hat. Es gilt

$$(*) \qquad \begin{aligned} & F''(v) > 0 \iff \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) > \frac{g''}{f''}(v) \\ \text{und} \quad & F''(v) < 0 \iff \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) < \frac{g''}{f''}(v) \quad . \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $sign\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u) = sign(u - a)$ hat $\left(\frac{g''}{f''}\right)$ die in Abbildung 5.10 skizzierte Gestalt. Da $u_1 < a$ ist, ist u_1 der kleinere Urbildpunkt (siehe Abbildung 5.10).

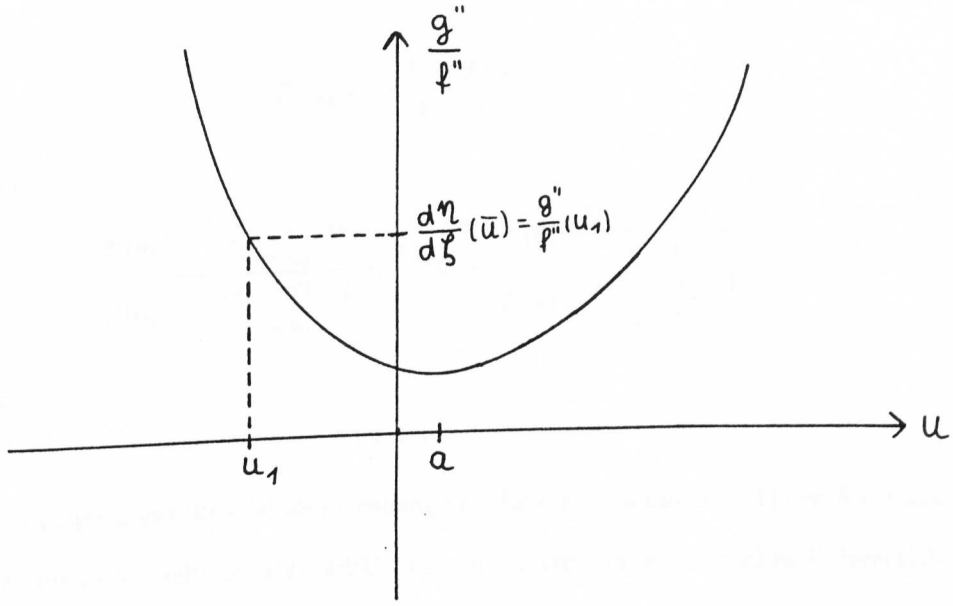


Abbildung 5.10

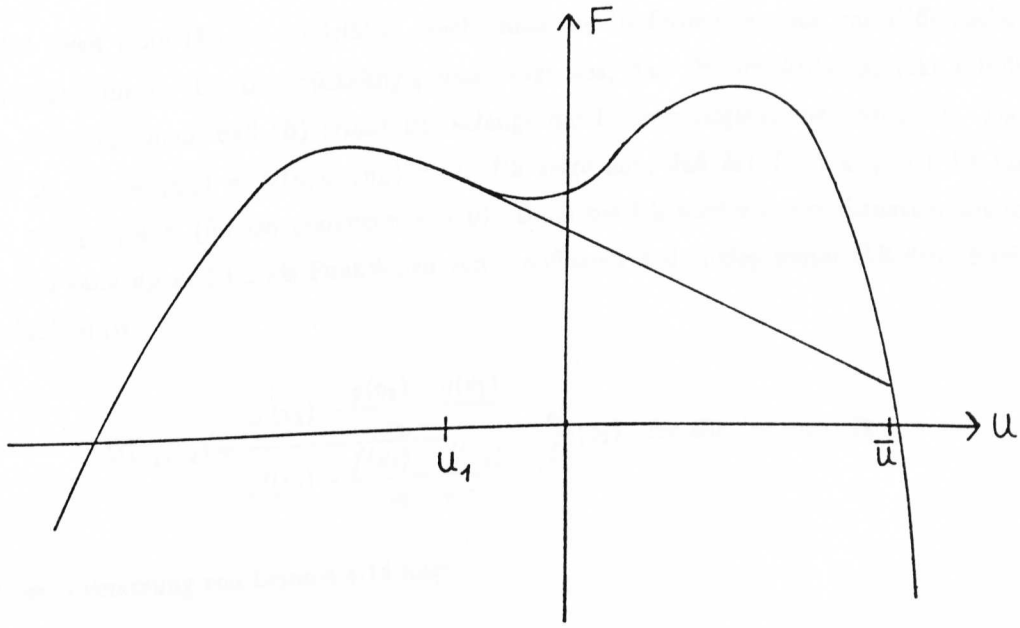


Abbildung 5.11

Aus (C) folgt

$$F'(u_1) = \frac{F(\bar{u}) - F(u_1)}{\bar{u} - u_1} \quad .$$

Da $\bar{u} > u_1$ ist und $u_1 < a$ ist, folgt aus $(*)$, daß sich F wie in Abbildung 5.11 dargestellt verhält.

Es folgt also

$$F'(\bar{u}) < \frac{F(\bar{u}) - F(u_1)}{\bar{u} - u_1} \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{g'(u_1) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}} = \frac{d\eta}{d\zeta}(\bar{u}) < \frac{g'(\bar{u}) - \dfrac{g(\bar{u}) - g(u_1)}{\bar{u} - u_1}}{f'(\bar{u}) - \dfrac{f(\bar{u}) - f(u_1)}{\bar{u} - u_1}}$$

und somit

$$K(\bar{u}, u_1) < 0 \quad .$$

Die Differentialgleichung für u ist also nichtsingulär. Ersetzt man nun in (A1) den Ausdruck $\dfrac{du}{du_-}$ durch die rechte Seite in (B2), erhält man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, daß man mit den Anfangsdaten

$$\eta_E(u_1) = \eta(\bar{u}) \quad \text{und} \quad u(u_1) = \bar{u}$$

lokal lösen kann (Picard-Lindelöf). Macht man die Umformungen, die zur Differentialgleichung für u_- führten, rückgängig und nutzt aus, daß (B) im Anfangspunkt erfüllt ist, so erhält man, daß (B) erfüllt ist, solange die Differentialgleichung lösbar ist. Damit ist $L(u, u_-, \eta_E) = N(u, u_-, \eta_E) = 0$. Ich zeige nun, daß $M(u(u_-), u_-) > 0$ ist für $u_- \in (u_1, u_1 + \varepsilon)$ (für ein geeignetes $\varepsilon > 0$). Dann bin ich wieder in der Situation wie in c) und kann η_E und u_- als Funktionen von u auffassen und analog weiterschließen. Nach Definition ist

$$M(v_1, v_2) = \frac{g'(v_2) - \dfrac{g(v_2) - g(v_1)}{v_2 - v_1}}{f'(v_2) - \dfrac{f(v_2) - f(v_1)}{v_2 - v_1}} - \frac{g''}{f''}(v_2) \quad \text{für alle} \quad v_1, v_2 \in I\!R \quad .$$

Unter Ausnutzung von Lemma 4.14 folgt

$$\frac{\partial}{\partial v_2} M(v_1, v_2)_{|(\bar{u}, u_1)} =$$

$$\frac{(u_1 - \bar{u}) f''(u_1)}{\left(f'(u_1) - \dfrac{f(u_1) - f(\bar{u})}{u_1 - \bar{u}}\right)^2} \underbrace{\left(\frac{g''}{f''}(u_1) - \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(u_1) - g(\bar{u})}{u_1 - \bar{u}}}{f'(u_1) - \dfrac{f(u_1) - f(\bar{u})}{u_1 - \bar{u}}}\right)}_{= 0 \text{ ,da } \bar{u} = w_2} - \underbrace{\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u_1)}_{\substack{< 0, \text{ da} \\ u_1 < a}} > 0 \quad .$$

Da außerdem

$$\frac{du}{du_-}(u_1) = 0 \quad \text{und} \quad M(u(u_1), u_1) = M(\bar{u}, u_1) = 0 \quad ,$$

folgt aus

$$\frac{d}{du_-}M(u(u_-),u_-)_{|u_-=u_1} = \frac{\partial}{\partial v_1}M(\bar{u},u_1)\underbrace{\frac{du}{du_-}(u_1)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial v_2}M(\bar{u},u_1)}_{>0} > 0 \quad ,$$

daß

$$M(u(u_-),u_-) > 0 \quad \text{für} \quad u_- \in (u_1, u_1+\varepsilon) \quad (\text{mit} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{geeignet}).$$

Damit sind die gleichen Voraussetzungen wie im Falle $p < u_4 < q$ erfüllt. Die Konstruktion kann analog vorgenommen werden.

II) Der Fall $u_1 > a$.

Zunächst zeige ich, daß es für alle $u_4 > u_1$ Punkte $u \in (u_1, u_4)$ existieren, so daß die Entropiebedingung im Punkte $(\zeta(u), \eta(u,u_4))$ verletzt ist. Dazu nutze ich aus, daß die Entropiebedingung notwendigerweise verletzt ist, falls $\eta(u) > g'(u)$ ist. Dann gilt nämlich

$$\frac{d\eta}{d\zeta}(u) = \frac{\eta(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}} > \frac{g'(u) - \dfrac{g(u)-g(u_1)}{u-u_1}}{f'(u) - \dfrac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}} \quad .$$

Nach Hilfssatz 4.5.3 gilt

$$\eta(u) - g'(u) = -\frac{1}{3}\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u_1)f''(u_1)(u-u_1)^2 ln(u-u_1) + \mathcal{O}((u-u_1)^2) \quad .$$

Da $u_1 > a$, folgt nach Voraussetzung $\left(\frac{g''}{f''}\right)'(u_1) > 0$. Daraus folgt die folgende Darstellung:

$$\eta(u) - g'(u) = -C(u-u_1)^2 ln(u-u_1) + h(u-u_1)$$

mit $C > 0$ und $h : [u_1, u_4] \longrightarrow I\!R$, so daß $\varepsilon > 0$ und $\tilde{C} > 0$ existieren mit

$$|h(u-u_1)| < \tilde{C}|u-u_1|^2 \quad \text{für alle } u \in [u_1, u_1+\varepsilon) \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{\eta(u)-g'(u)}{(u-u_1)^2} = -C\,ln(u-u_1) + \frac{h(u-u_1)}{(u-u_1)^2} > \underbrace{-C\,ln(u-u_1)}_{\to\infty \text{ für } u\to u_1} - \tilde{C} \quad .$$

Also ist

$$\eta(u) - g'(u) > 0 \text{ für } |u-u_1| \text{ klein.}$$

Damit ist gezeigt, daß die Entropiebedingung in jedem Fall verletzt wird. Da $u_1 > a$ ist, gilt

$$\frac{g''}{f''}(u_1) - \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(v)-g(u_1)}{v-u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(v)-f(u_1)}{v-u_1}} < 0 \quad \text{für } v > u_1$$

und

$$\frac{g''}{f''}(v) - \frac{g'(v) - \dfrac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1}}{f'(v) - \dfrac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1}} > 0 \quad \text{für } v > u_1 \quad .$$

Dies folgt wie im Beweis des Lemmas 5.4. Aus den Lemmata 4.10–4.12 folgt dann, daß notwendigerweise $\bar{v} = u_1$ gilt. Jetzt kann die Enveloppewelle wie im Fall $u_1 < a, u_4 > q$ konstruiert werden.

III) Der Fall $u_1 = a$.

In diesem Fall gilt

$$\frac{g''}{f''}(v) - \frac{g'(v) - \dfrac{g(v) - g(u_1)}{v - u_1}}{f'(v) - \dfrac{f(v) - f(u_1)}{v - u_1}} > 0 \quad \text{für alle } v \in (u_1, u_4)$$

(siehe Beweis zu Lemma 5.4). Aus den Lemmata 4.10–4.12 folgt, daß nur eine Entropieveletzung mit dem tangentialen Wert u_1 auftreten kann. Setze nun

$$r := \inf \{ u_4 \,|\, u_4 > u_1 \quad \text{und die Schockkurve verletzt die Entropiebedingung} \}$$

Falls $r < \infty$ ist, folgt wie im Fall I, daß für alle $u_4 > r$ die Entropiebedingung für die Schockkurve $(\zeta, \eta(., u_4))$ verletzt ist. Die Entropielösungen erhält man mit der Konstruktion der Enveloppewelle wie im Fall I. Für $u_4 \leq r$ ist die Entropiebedingung nach Definition von r erfüllt. Damit ist Satz 5.2 gezeigt.

q.e.d.

KAPITEL 6

ABSCHLIESSENDE BEMERKUNGEN UND MÖGLICHE VERALLGEMEINERUNGEN

6.1 Bemerkung

Im folgenden zeige ich, daß im Fall $f = u^2$, $g = u^4$, $u_1 < 0$ alle drei Phänomene aus der Behauptung des Satzes 5.2 auftreten. Die Flußfunktion $g = u^4$ erfüllt nicht die Voraussetzungen des Satzes 5.2, da $g''(0) = 0$ ist. Die Aussage des Satzes gilt allerdings auch in diesem Fall. Sieht man sich die Beweisführung auf diesen Fall hin an, ergibt sich, daß sie die Behauptung des Satzes 5.2 liefert. Ich zeige nun, daß es kritische Entropiewerte gibt, deren tangentialer Wert u_1 ist. Daraus folgt $q < \infty$. Somit treten die Phänomene (A),(B) und (C) auf. Für die obige Wahl von f und g gilt

$$\eta(u) = \frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} + (u-u_1)^2 \left[\frac{6u_1^2}{u - u_1} - 8u_1 ln(u - u_1) + 3(u_4 - u) - \frac{6u_1^2}{u_4 - u_1} + 8u_1 ln(u_4 - u_1) \right].$$

Ich zeige zunächst, daß es zu jedem $u_1 < 0$ Werte u_4 gibt, so daß die Entropiebedingung für die zugehörige Schockkurve verletzt wird. Ich habe im letzten Kapitel gezeigt, daß die Entropiebedingung verletzt ist, falls $\eta(u) > g'(u)$ ist für gewisse $u \in (u_1, u_4)$. Diese Tatsache nutze ich aus. Es ist

$$\eta(u) - g'(u) =$$

$$\frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} + (u - u_1)^2 \left[\frac{6u_1^2}{u - u_1} - 8u_1 ln(u - u_1) + 3(u_4 - u) - \frac{6u_1^2}{u_4 - u_1} + 8u_1 ln(u_4 - u_1) \right] - g'(u).$$

Mit

$$g(u_1) = g(u) + g'(u)(u_1 - u) + 1/2\, g''(u)(u_1 - u)^2 + 1/6\, g'''(u)(u_1 - u)^3 + 1/24\, g''''(u)(u_1 - u)^4$$

ergibt sich

$$\frac{\eta(u) - g'(u)}{(u - u_1)^2} =$$

$$1/2\, \frac{g''(u)}{u_1 - u} + 1/6\, g'''(u) + 1/24\, g''''(u)(u_1 - u) + \frac{6u_1^2}{u - u_1} + 8u_1 ln\left(\frac{u_4 - u_1}{u - u_1}\right) + 3(u_4 - u) - \frac{6u_1^2}{u_4 - u_1}.$$

Nun setze $u_4 = -9u_1$ und $u = -4u_1$ ein:

$$\begin{aligned}
\frac{\eta(u) - g'(u)}{(u - u_1)^2} &= 6\frac{(-4u_1)^2}{u_1 + 4u_1} + 4(-4u_1) + u_1 + 4u_1 + \frac{6u_1^2}{-4u_1 - u_1} + 8u_1 ln\left(\frac{-9u_1 - u_1}{-4u_1 - u_1}\right) + \\
&\quad + 3(-9u_1 + 4u_1) - \frac{6u_1^2}{-9u_1 - u_1} \\
&= u_1\,(96/5 - 16 + 5 - 6/5 + 8ln2 - 15 + 6/10) \\
&= \underbrace{u_1}_{<0}\,\underbrace{(8ln2 - 7 - 2/5)}_{<0} > 0
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\eta(-4u_1) > g'(-4u_1)$ ist und somit die Entropiebedingung verletzt wird. Ich zeige jetzt, daß $-4u_1 > w_2$ ist. Dann muß der kritische Entropiewert ebenfalls größer als w_2 sein. Im Punkt w_2 gilt

$$\frac{g''}{f''}(u_1) = \frac{g'(u_1) - \dfrac{g(w_2) - g(u_1)}{w_2 - u_1}}{f'(u_1) - \dfrac{f(w_2) - f(u_1)}{w_2 - u_1}} \quad .$$

Man erhält also folgende Bestimmungsgleichung für w_2

$$\begin{aligned} 6u_1^2 &= \frac{4u_1^3 - (u_1^3 + u_1^2 w_2 + u_1 w_2^2 + w_3^3)}{u_1 - w_2} \\ &= \frac{3u_1^3 - u_1^2 w_2 - u_1 w_2^2 - w_2^3}{u_1 - w_2} \\ &= 3u_1^2 + 2u_1 w_2 + w_2^2 \quad . \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} 0 &= w_2^2 + 2u_1 w_2 - 3u_1^2 \\ &= (w_2 + 3u_1)(w_2 - u_1) \quad . \end{aligned}$$

Da $w_2 > u_1$ ist, folgt $w_2 = -3u_1$. Es ist aber $-4u_1 > -3u_1 = w_2$ (da $u_1 < 0$). Also muß $\bar{u}(u_4) > w_2$ sein und somit ist u_1 tangentialer Wert (siehe Korollar 5.6).

6.2 Bemerkung (mögliche Transformationen)

1.) Die Fälle $f'' < 0$, $g'' < 0$ und $f'' > 0$, $g'' < 0$ sowie $f'' < 0$, $g'' > 0$ können durch die Transformationen $x \longrightarrow -x$, $y \longrightarrow -y$; $x \longrightarrow x$, $y \longrightarrow -y$ bzw. $x \longrightarrow -x$, $y \longrightarrow y$ auf den Fall mit konvexen Flußfunktionen f und g zurückgeführt werden.

2.) Insgesamt gibt es vierundzwanzig mögliche Anordnungen der Anfangsdaten $u_1, .., u_4$. Durch die Transformationen

$$\begin{array}{llllll} i) & x \longrightarrow y & , & y \longrightarrow x & , & u \longrightarrow u & ; \\ ii) & x \longrightarrow -x & , & y \longrightarrow -y & , & u \longrightarrow -u & ; \\ iii) & x \longrightarrow -y & , & y \longrightarrow -x & , & u \longrightarrow -u & \end{array}$$

kann die Anzahl der qualitativ verschiedenen Fälle auf acht reduziert werden. Alle Transformationen erhalten das Vorzeichen der auftauchenden Flußfunktionen.

6.3 Bemerkung

1.) Die durch diese Arbeit nicht erfaßten Anordnungen der Anfangsdaten $u_1, .., u_4$ können mit den Methoden von Chang und Cheng [2] in Kombination mit den Methoden aus dieser Arbeit behandelt werden.

2.) Im Fall, daß $f'', g'' > 0$ sind und $\left(\frac{g''}{f''}\right)'$ separierte Nullstellen hat, können die Methoden aus den Kapiteln 4 und 5 für die Konstruktion benutzt werden. Unter diesen Voraussetzungen kann es im Fall $u_3 \leq u_2 \leq u_1 < u_4$ zu Aufspaltungen der Schockkurven η_E und η_F kommen. Dies ist der Fall, falls η_E und η_F die Entropiebedingung verletzen. Diese Situation kann eintreten, falls $\left(\frac{g''}{f''}\right)'$ zwei oder mehr Wendestellen hat. In den kritischen Entropiepunkten, d.h. in Punkten, die Segmente der Schockkurve, in denen die Entropiebedingung erfüllt ist, von Segmenten trennt, in denen sie verletzt wird, gelten zu den Lemmata 4.9-4.12 analoge Aussagen. Diese liefern die Grundlage, um die Methoden zu benutzen, die bei der Konstruktion der Enveloppewelle in Kapitel 5 hergeleitet wurden. Die Anzahl der Aufspaltungen von Schocks ist durch die Anzahl der Nullstellen von $\left(\frac{g''}{f''}\right)'$ im Intervall $[u_1, u_4]$ beschränkt.

Literatur:

[1] CHANG TUNG, CHR. KLINGENBERG:

The Riemann Problem of a Scalar Conservation Law in Two Space Dimensions. To appear , Trans AM.

[2] CHANG TUNG, ZHENG YU-XI:

Two Dimensional Riemann Problem for a Single Conservation Law. To appear.

[3] J. GUCKENHEIMER:

Shocks and Rarefactions in Two Space Dimensions. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 59, No. 3, pp 281-291, 1975.

[4] HSIAO LING, CHR. KLINGENBERG:

The Construction of the Solution to a Nonconvex Two-dimensional Riemann-problem. Preprint(Heidelberg).

[5] S.N. KRUZKOV:

First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables. Math. USSR Sbornik, Vol. 10, No. 2, pp. 217-243, 1970

[6] P.D. LAX:

Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1973.

[7] W.B. LINDQUIST:

The Scalar Riemann Problem in Two Spatial Dimensions : Piecewise Smoothness of Solutions and its Breakdown. SIAM J. Math. Anal., Vol. 17, No. 5, pp. 1178-1197, September 1986.

[8] W.B. LINDQUIST:

Construction of Solutions for Two-dimensional Riemann Problems. Comp. and Maths. with Appls., Vol 12A, Nos. 4/5, pp. 615-630, 1986.

[9] J. SMOLLER:

Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer Verlag, 1983.

[10] Y. VAL'KA:

Discontinous Solutions of a Multidimensional Quasilinear Equation (Numerical Experiments). USSR Comp. Math. Phys. 8, pp 257-264, 1968.

[11] D.H. WAGNER:

The Riemann Problem in Two Space Dimensions for a Single Conservation Law. SIAM J. Math. Anal. 14(3), pp 534-559, 1983.