

**Travelling-Wave-Lösungen
als Realisierung von
Phasenübergängen bei
Gedächtnismetallen**

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Bonn

vorgelegt von
HARALD GARCKE

Bonn 1992

Referent: Prof. Dr. H.W. Alt
Koreferent: Prof. Dr. St. Luckhaus

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	4
2. Travelling-Wave-Lösungen im isothermen Fall	10
2.1 Bestimmung der isothermen Travelling-Wave-Lösungen	10
2.2 Einige Beispiele	13
2.3 Singulärer Grenzübergang ($\gamma \rightarrow 0$)	14
3. Conley-Index und Existenz von Travelling-Wave-Lösungen	17
3.1 Conley-Index	17
3.2 Existenz von Travelling-Wave-Lösungen im isothermen Fall	23
4. Existenz von Travelling-Wave-Lösungen im nichtisothermen Fall	32
4.1 Existenz von Ruhepunkten	34
4.2 Eine starke Ljapunovfunktion	39
4.3 Existenzbeweis im nichtisothermen Fall	45
Literatur	50

KAPITEL 1

EINFÜHRUNG

Bei der mathematischen Modellierung von Gedächtnismetallen betrachtet man das folgende System von partiellen Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_{tt} - [\sigma(u_x, \theta)]_x + \gamma^2 u_{xxxx} &= 0, \\ \theta [S(u_x, \theta)]_t - \kappa \theta_{xx} &= 0. \end{aligned}$$

Dabei ist u die Auslenkung, θ die absolute Temperatur, die positive Konstante κ der Wärmeleitungskoeffizient und γ eine positive Konstante. Die Spannung σ und die Entropie S ergeben sich aus der freien Energie F

$$F(\theta, \varepsilon, \varepsilon_x) := F_0(\theta) + \theta F_1(\varepsilon) + F_2(\varepsilon) + \frac{\gamma^2}{2} \varepsilon_x^2.$$

Wie üblich bezeichnet $\varepsilon = u_x$ die Deformation. Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon, \theta) &:= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \varepsilon_x, \theta), \\ S(\varepsilon, \theta) &:= -\frac{\partial F}{\partial \theta}(\varepsilon, \varepsilon_x, \theta). \end{aligned}$$

Zur Herleitung des Systems (1) und zu obigem Ansatz der freien Energie vergleiche die Arbeiten von Falk [4 – 6], Srekels und Zheng [10] sowie die in diesen Arbeiten angegebene Literatur. Eine Form von F , die das experimentell beobachtete Verhalten von Gedächtnismetallen sehr gut wiedergibt, ist

$$F(\theta, \varepsilon, \varepsilon_x) := F_0(\theta) + \alpha_1(\theta - \theta_1)\varepsilon^2 - \alpha_2\varepsilon^4 + \alpha_3\varepsilon^6 + \frac{\gamma^2}{2}\varepsilon_x^2.$$

Eine typische Wahl von F_0 ist

$$F_0(\theta) := c_v (\theta - \theta \log \theta) + \tilde{C}.$$

Hierbei ist $c_v \in \mathbb{R}^+$ die spezifische Wärme und $\tilde{C}$ eine feste Konstante. Diese Wahl von F führt zu in ε nichtmonotonen Spannungen σ . Nur bei hohen Temperaturen ($\theta > \theta^*$) ist σ monoton. Die Abbildungen 1.1–1.3 zeigen σ für verschiedene Temperaturen θ . Die beiden äußeren Zweige entsprechen den martensitischen Phasen (M_- und M_+ -Phase). Für Temperaturen im mittleren Bereich liegt außerdem eine Austenit-Phase (A-Phase) vor (vgl. Falk [4 – 6], Srekels und Zheng [10]).

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Travelling-Wave-Lösungen zu finden, die Übergänge zwischen diesen Phasen realisieren. Zu diesem Zweck bringen wir die Gleichung (1) zunächst auf Erhaltungsform und formen sie anschließend in ein System erster Ordnung um. Die totale Energie

$$E = F + \theta S + \frac{1}{2} u_t^2$$

ist eine Erhaltungsgröße. Für sie ergeben sich die Identitäten

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{\partial F}{\partial \theta} \theta_t + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} u_{tx} + \gamma^2 u_{xx} u_{txx} + \theta_t \left(-\frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \theta S_t + u_t u_{tt} \\ &= \sigma u_{tx} + \gamma^2 u_{xx} u_{txx} + \kappa \theta_{xx} + u_t (\sigma_x - \gamma^2 u_{xxxx}) \\ &= (\sigma u_t)_x + \kappa \theta_{xx} + \gamma^2 (u_{xx} u_{tx})_x - \gamma^2 (u_t u_{xxx})_x . \end{aligned}$$

Die Temperaturgleichung aus (1) ersetzen wir durch die Gleichung

$$E_t = (\sigma u_t)_x + \kappa \theta_{xx} + \gamma^2 (u_{xx} u_{tx})_x - \gamma^2 (u_t u_{xxx})_x .$$

Mit der Geschwindigkeit $v = u_t$ und der Deformation $\varepsilon = u_x$ erhalten wir das folgende, zu (1) äquivalente System

$$\begin{aligned} (2) \quad \varepsilon_t &= v_x , \\ v_t &= [\sigma(\varepsilon, \theta)]_x - \gamma^2 \varepsilon_{xxx} , \\ E_t &= [\sigma(\varepsilon, \theta) v]_x + \kappa \theta_{xx} + \gamma^2 (\varepsilon_x v_x)_x - \gamma^2 (v \varepsilon_{xx})_x . \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist dabei eine Kompatibilitätsbedingung, die garantiert, daß man aus (ε, v) wieder die Auslenkung u gewinnen kann.

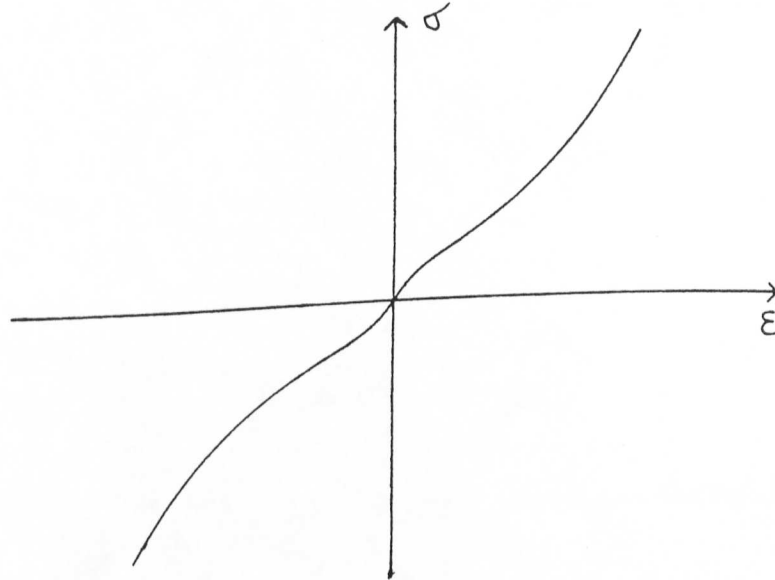


Abbildung 1.1: $\theta > \theta^*$

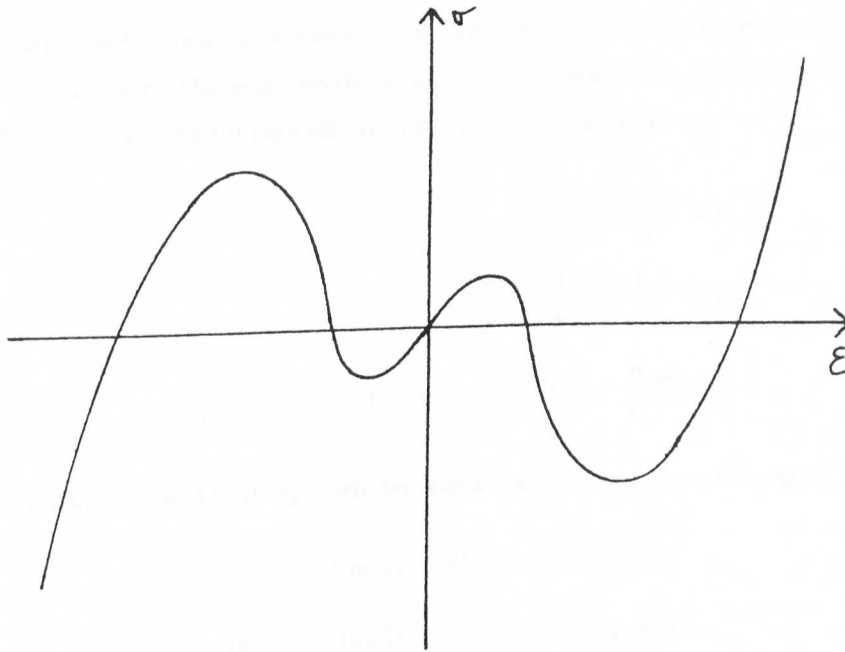


Abbildung 1.2: $\theta \in (\theta_1, \theta^*)$

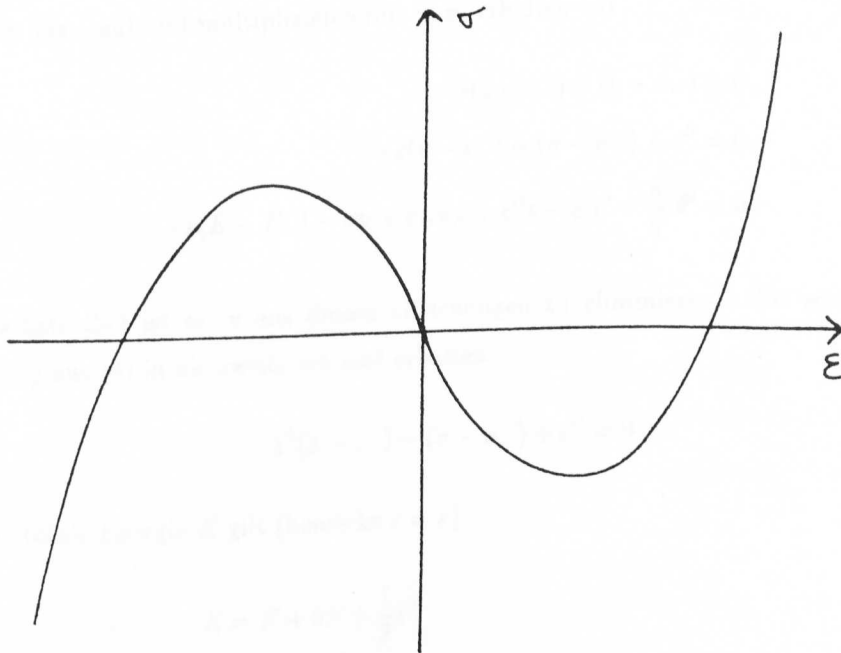


Abbildung 1.3: $\theta \in (0, \theta_1)$

Unter Travelling-Wave-Lösungen des Systems (2) verstehen wir Lösungen, die nur von der Variablen $z = \frac{x-st}{\gamma}$ abhängen, d.h. Lösungen der Form

$$\varepsilon(x, t) = \hat{\varepsilon}\left(\frac{x-st}{\gamma}\right), \quad v(x, t) = \hat{v}\left(\frac{x-st}{\gamma}\right), \quad \theta(x, t) = \hat{\theta}\left(\frac{x-st}{\gamma}\right),$$

die für $z \rightarrow \pm\infty$ konvergieren. Dabei ist $s \in \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit der Welle. Im weiteren werden wir zwischen den Funktionen ε, v, θ und $\hat{\varepsilon}, \hat{v}, \hat{\theta}$ nicht mehr unterscheiden. Aus dem Zusammenhang wird klar sein, welche Funktionen gemeint sind. Setzt man diesen Ansatz in das System von Erhaltungsgleichungen (2) ein, so erhält man

$$(3) \quad \begin{aligned} -\frac{s}{\gamma}\varepsilon' - \frac{1}{\gamma}v' &= 0, \\ -\frac{s}{\gamma}v' - \frac{1}{\gamma}\sigma' + \frac{1}{\gamma}\varepsilon''' &= 0, \\ -\frac{s}{\gamma}E' + \frac{1}{\gamma}((-\sigma + \varepsilon'')v)' - \frac{1}{\gamma}(\varepsilon'v')' - \frac{\kappa}{\gamma^2}\theta'' &= 0. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $'$ die Ableitung nach der Variablen z . Wir suchen Lösungen, für die gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} (\varepsilon, v, \theta)(z) &= (\varepsilon_-, v_-, \theta_-) \\ \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (\varepsilon, v, \theta)(z) &= (\varepsilon_+, v_+, \theta_+). \end{aligned}$$

Dabei seien $\varepsilon_-, \varepsilon_+, v_-, v_+ \in \mathbb{R}$ und $\theta_-, \theta_+ \in \mathbb{R}^+$. Integrieren wir das Gleichungssystem (3) von $-\infty$ bis z auf und multiplizieren mit γ , so erhalten wir

$$(4) \quad \begin{aligned} -s(\varepsilon - \varepsilon_-) - (v - v_-) &= 0, \\ -s(v - v_-) - (\sigma - \sigma_-) + \varepsilon'' &= 0, \\ -s(E - E_-) - \sigma v + \sigma_- v_- + \varepsilon''v - \varepsilon'v' - \frac{\kappa}{\gamma}\theta' &= 0. \end{aligned}$$

Das nächste Ziel ist es, v aus diesen Gleichungen zu eliminieren. Wir setzen die erste Gleichung aus (4) in die zweite ein und erhalten

$$(5) \quad s^2(\varepsilon - \varepsilon_-) - (\sigma - \sigma_-) + \varepsilon'' = 0.$$

Für die totale Energie E gilt (bemerke $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$)

$$\begin{aligned} E &= F + \theta S + \frac{1}{2}v^2 \\ &= F_0(\theta) - \theta F'_0(\theta) + F_2(\varepsilon) + \frac{1}{2}(\varepsilon')^2 + \frac{1}{2}v^2. \end{aligned}$$

Führen wir die Abkürzung

$$\overline{U} := F_0(\theta) - \theta F'_0(\theta) + F_2(\varepsilon)$$

ein, so ergibt sich aus der dritten Identität in (4)

$$-s \left(\overline{U} + \frac{1}{2}(\varepsilon')^2 + \frac{1}{2}v^2 - \overline{U}_- - \frac{1}{2}v_-^2 \right) - \sigma v + \sigma_- v_- + \varepsilon''v - \varepsilon'v' - \frac{\kappa}{\gamma}\theta' = 0.$$

Vermöge der Identitäten (siehe (3) und (4))

$$v' = -s\varepsilon',$$

$$\varepsilon'' = \sigma - \sigma_- + s(v - v_-),$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_-^2) = \frac{1}{2}(v - v_-)(v + v_-)$$

$$\text{und} \quad v - v_- = -s(\varepsilon - \varepsilon_-)$$

ergibt sich

$$-s(\bar{U} - \bar{U}_-) + s\sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^3}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{s}{2}(\varepsilon')^2 - \frac{\kappa}{\gamma}\theta' = 0.$$

Die Gleichung (5) schreiben wir als ein System erster Ordnung, so daß sich insgesamt das folgende System ergibt

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= w, \\ w' &= \sigma - \sigma_- - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-), \\ \theta' &= \frac{\gamma s}{\kappa} \left(-\bar{U} + \bar{U}_- + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Außerdem müssen die Lösungen von (6)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} (\varepsilon, w, \theta)(z) &= (\varepsilon_-, 0, \theta_-) \\ \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (\varepsilon, w, \theta)(z) &= (\varepsilon_+, 0, \theta_+) \end{aligned}$$

erfüllen. Die Zustände $(\varepsilon_-, \theta_-)$ und $(\varepsilon_+, \theta_+)$ sollen dabei verschiedene Phasenzustände realisieren. Haben wir solche Lösungen gefunden, so erhalten wir die Geschwindigkeit v mittels der ersten Identität aus (4).

Wir gehen folgendermaßen vor:

In Kapitel 2 behandeln wir das isotherme Problem, d.h. den Fall konstanter Temperatur.

In diesem Fall müssen wir die Gleichung

$$\varepsilon'' = \sigma(\varepsilon, \bar{\theta}) - \sigma(\varepsilon_-, \bar{\theta}) - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-)$$

untersuchen. Dabei ist $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^+$ eine feste Temperatur. Wir werden einen Satz beweisen, der charakterisiert, unter welchen Voraussetzungen Travelling-Wave-Lösungen existieren. Der Beweis dieses Satzes nutzt im wesentlichen die Existenz einer Hamiltonfunktion für die isotherme Gleichung aus. Dann diskutieren wir anhand einiger Beispiele mögliche Phasenübergänge bei Gedächtnismetallen. Schließlich betrachten wir das Verhalten der

Travelling-Wave-Lösungen für $\gamma \rightarrow 0$. Wir zeigen die Konvergenz gegen eine schwache Lösung des Systems

$$\varepsilon_t = v_x,$$

$$v_t = \sigma(\varepsilon, \bar{\theta})_x.$$

Um die Existenz von nichtisothermen Travelling-Wave-Lösungen zu zeigen, werden wir den Conley-Index benutzen. Der Conley-Index ist eine topologische Invariante für isolierte invariante Mengen. Er besitzt eine Additionseigenschaft und ist invariant gegen geeignete stetige Störungen. Insbesondere die Additionseigenschaft wird entscheidend in den Existenzbeweis eingehen.

Kapitel 3 gibt zunächst einige Aussagen über den Conley-Index an. In Abschnitt 3.2 führen wir mit Hilfe des Conley-Index einen weiteren Beweis für die Existenz isothermer Travelling-Wave-Lösungen. Die dabei benutzten Konstruktionen benötigen wir in Kapitel 4 für den nichtisothermen Fall.

Im Kapitel 4 untersuchen wir zunächst die Ruhezpunkte des Systems (6). In Abschnitt 4.2 zeigen wir die Existenz einer starken Ljapunovfunktion. Anschließend werden einige Eigenschaften der Ljapunovfunktion und der Ruhezpunkte gezeigt, die wir dann im Abschnitt 4.3 benötigen, um die Existenz von nichtisothermen Travelling-Wave-Lösungen zu zeigen.

An dieser Stelle noch einige Bemerkungen zur Literatur. Das grundlegende Werk über den Conley-Index ist die Monographie von Conley [2]. Eine weitere gute Einführung in diese Theorie bietet der Teil IV im Buch von Smoller [8]. Anwendungen des Conley-Index auf Travelling-Wave-Probleme, die zum Teil auch in dieser Arbeit Verwendung finden, stammen von Conley und Gardner [3]. Ihre Idee bestand darin, einen Index für parameterabhängige Differentialgleichungen zu konstruieren. Die Arbeit von Grinfeld [7] ist eine Anwendung dieser Ideen auf Phasenübergänge in van-der-Waals-Flüssigkeiten. In dieser Arbeit werden die Überlegungen von Conley und Gardner auf Phasenübergänge bei Gedächtnismetallen angewendet. Im Gegensatz zu Phasenübergängen bei van-der-Waals-Flüssigkeiten hat man in diesem Fall keine Viskosität. Die Arbeiten von Falk [4 – 6] behandeln Travelling-Wave-Lösungen im isothermen Fall. Diese Arbeit verallgemeinert die Ergebnisse von Falk und ist, soweit mir bekannt ist, die erste Arbeit zum nichtisothermen Problem.

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, um Herrn Prof. Dr. H.W. Alt und dem SFB 256 für die Bereitstellung der Arbeitsbedingungen zu danken, die es mir ermöglichten, diese Arbeit anzufertigen.

KAPITEL 2

TRAVELLING-WAVE-LÖSUNGEN IM ISOTHERMEN FALL

In diesem Kapitel sollen die isothermen Travelling-Wave-Lösungen analysiert werden. Das bedeutet, wir studieren die Gleichung

$$(7) \quad \varepsilon'' = \sigma(\varepsilon, \bar{\theta}) - \sigma(\varepsilon_-, \bar{\theta}) - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-).$$

Dabei sei $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^+$ eine feste Temperatur. Im folgenden verwenden wir die Abkürzung $\sigma_- := \sigma(\varepsilon_-, \bar{\theta})$. Da wir an Travelling-Wave-Lösungen interessiert sind, die Zustände aus verschiedenen Phasen miteinander verbinden, werden wir uns auf das Studium von Lösungen beschränken, die für $z \rightarrow \pm\infty$ verschiedene Werte annehmen. Wir beweisen zunächst einen Satz, der charakterisiert, wann solche Lösungen existieren, und geben im Anschluß einige Beispiele an, wie sie im Zusammenhang mit Gedächtnismetallen auftreten.

2.1 BESTIMMUNG DER ISOTHERMEN TRAVELLING-WAVE-LÖSUNGEN

In dem folgenden Satz werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Travelling-Wave-Lösungen angegeben.

2.1 Satz:

Es sei

$$\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Lipschitz-stetig in der ersten Komponente und ε_- und ε_+ seien zwei verschiedene reelle Zahlen. Dann existiert eine (isotherme) Travelling-Wave-Lösung, die ε_- und ε_+ verbindet, g.d.w.

- i) $\sigma(\varepsilon_+, \bar{\theta}) - \sigma_- - s^2(\varepsilon_+ - \varepsilon_-) = 0,$
- ii) $\int_{\varepsilon_-}^{\varepsilon_+} [\sigma(\tau, \bar{\theta}) - \sigma_- - s^2(\tau - \varepsilon_-)] d\tau = 0,$
- iii) $\int_{\varepsilon_-}^{\bar{\varepsilon}} [\sigma(\tau, \bar{\theta}) - \sigma_- - s^2(\tau - \varepsilon_-)] d\tau > 0$ für alle $\bar{\varepsilon}$ zwischen ε_- und ε_+ .

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon_- < \varepsilon_+$. Sei ε eine Lösung mit $\varepsilon(-\infty) = \varepsilon_-$ und $\varepsilon(\infty) = \varepsilon_+$. Wir multiplizieren die Gleichung (7) mit ε' und erhalten

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} (\varepsilon')^2(z) - H(\varepsilon(z)) \right] = 0.$$

Dabei sei

$$H(\varepsilon) := \int_{\varepsilon_-}^{\varepsilon} \left[\sigma(\tau, \bar{\theta}) - \sigma_- - s^2(\tau - \varepsilon_-) \right] d\tau.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2} (\varepsilon')^2(z) = H(\varepsilon(z)).$$

Da $\varepsilon_- < \varepsilon_+$ ist, gibt es ein $\bar{z}$ mit $\varepsilon'(\bar{z}) > 0$. Sei

$$G(\varepsilon) := \int_{\varepsilon(\bar{z})}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2H(\tau)}} d\tau.$$

Solange $H \neq 0$ ist, gilt

$$\varepsilon(z) = G^{-1}(z - \bar{z}).$$

Sei (z_-, z_+) das maximale Intervall um $\bar{z}$, so daß $H > 0$ ist. Es können drei Fälle auftreten:

1) Das Intervall ist endlich.

Spiegelt man die lokale Lösung jeweils um die Stellen mit $\varepsilon' = 0$ (und damit $F = 0$), so erhält man eine auf $\mathbb{R}$ definierte periodische Lösung. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, daß ε für $z \rightarrow \pm\infty$ konvergiert.

2) Das Intervall ist auf einer Seite unbeschränkt.

Ohne Einschränkung sei $(z_-, z_+) = (-\infty, z_+)$. Spiegeln wir die Lösung an z_+ , so erhalten wir die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$. In diesem Fall würde aber für $z \rightarrow \pm\infty$ jeweils der gleiche Wert angenommen werden. Das haben wir in unseren Voraussetzungen ausgeschlossen.

3) Das Intervall stimmt mit der gesamten reellen Achse überein.

In diesem Fall ist $H(\varepsilon(z)) > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Da $\varepsilon(-\infty) = \varepsilon_-$ und $\varepsilon(\infty) = \varepsilon_+$ gilt, ist damit iii) gezeigt. Aus $\lim_{z \rightarrow \infty} \varepsilon(z) = \varepsilon_+$ folgt, daß $(\varepsilon_+, 0)$ Ruhepunkt der Differentialgleichung sein muß. Damit ist i) gezeigt. Da $\varepsilon(z) = G^{-1}(z - \bar{z})$ ist, gilt

$$G(\varepsilon_+) = \int_{\varepsilon(\bar{z})}^{\varepsilon_+} \frac{1}{\sqrt{2H(\tau)}} d\tau = \infty.$$

Also hat H in ε_+ eine Nullstelle. Somit ist auch ii) gezeigt.

Damit erfüllt jede Travelling-Wave-Lösung, die ε_- und ε_+ verbindet, die Bedingungen i)–iii). Es bleibt zu zeigen, daß zu allen $\varepsilon_-, \varepsilon_+ \in \mathbb{R}$, die den Bedingungen i)–iii) genügen, eine Travelling-Wave-Lösung existiert, die diese beiden Zustände verbindet. Sei wieder ohne Einschränkung $\varepsilon_- < \varepsilon_+$ vorausgesetzt. Es sei

$$G(\varepsilon) := \int_{\tilde{\varepsilon}}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2H(\tau)}} d\tau \text{ mit einem } \tilde{\varepsilon} \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+).$$

Die Funktion G ist nach Voraussetzung iii) auf dem ganzen Intervall $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ definiert.

Behauptung: $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_-} G(\varepsilon) = -\infty$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_+} G(\varepsilon) = \infty$.

Aus den Voraussetzungen i) und ii) folgt, daß $H(\varepsilon_+) = H'(\varepsilon_+) = 0$. Damit gilt in einer Umgebung von ε_+

$$|H(\varepsilon)| \leq C|\varepsilon - \varepsilon_+|^2.$$

Aus

$$\frac{1}{\sqrt{2H(\tau)}} \geq \frac{1}{C|\tau - \varepsilon_+|}$$

folgt dann

$$\int_{\tilde{\varepsilon}}^{\varepsilon_+} \frac{1}{\sqrt{2H(\tau)}} d\tau = \infty.$$

Entsprechend folgt

$$\int_{\tilde{\varepsilon}}^{\varepsilon_-} \frac{1}{\sqrt{2H(\tau)}} d\tau = -\infty$$

aus $H(\varepsilon_-) = H'(\varepsilon_-) = 0$. Die Funktion

$$\varepsilon(z) := G^{-1}(z)$$

ist somit auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, erfüllt die Differentialgleichung (7) und nimmt die geforderten Randwerte an.

q.e.d.

2.2 EINIGE BEISPIELE

Ein typisches Beispiel für eine freie Energie ist

$$F(\theta, \varepsilon, \varepsilon_x) = F_0(\theta) + \alpha_1(\theta - \theta_1)\varepsilon^2 - \alpha_2\varepsilon^4 + \alpha_3\varepsilon^6 + \frac{\gamma^2}{2}\varepsilon_x^2.$$

Im folgenden wollen wir die Aussagen des Satzes 2.1 auf dieses Beispiel anwenden.

a) Für Temperaturen $\theta < \theta_1$ sieht σ wie in Abbildung 1.3 aus. Wir beschränken uns auf den Fall $\varepsilon_- < \varepsilon_+$. Aus Bedingung ii) folgt $\sigma_- \leq 0$. Die Voraussetzung ii) impliziert außerdem, daß die schraffierten Flächen A und B in der Abbildung 2.1 den gleichen Flächeninhalt haben. Dieses ist aber wegen der Symmetrie von σ nur dann möglich, wenn $s^2 = \frac{\sigma_-}{\varepsilon_-} = \frac{\sigma_+}{\varepsilon_+}$ gilt. Damit ist die Bedingung iii) automatisch erfüllt. Da σ ungerade ist, folgt hieraus $\varepsilon_+ = -\varepsilon_-$. Die Bedingung an die Flächeninhalte A und B , ist eine dynamische Verallgemeinerung der Maxwell ("equal area") Bedingung.

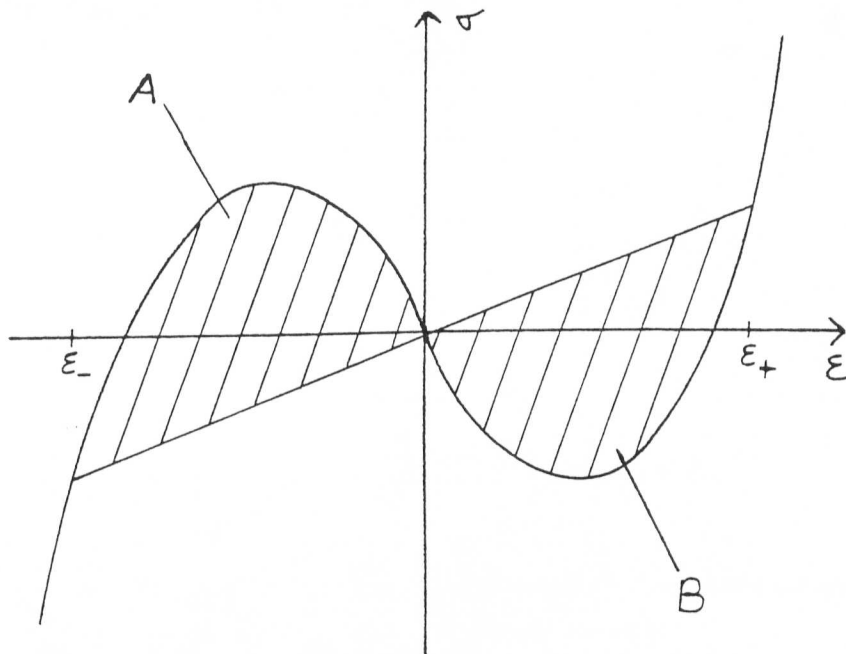


Abbildung 2.1

b) Für Temperaturen in einem mittleren Bereich hat σ die Gestalt, wie in den Abbildungen 2.2–2.4 dargestellt. In Abbildung 2.2 sind ε_- und ε_+ nicht durch eine Travelling-Wave-Lösung verbunden. Zwar ist die Bedingung ii) aus Satz 2.1 erfüllt, aber da der Flächeninhalt von C kleiner ist als der von D wird die Bedingung iii) verletzt.

Wählen wir ε_- und ε_+ wie in Abbildung 2.3, das heißt ε_- ist kleiner als in Abbildung 2.2, so sind die Voraussetzungen des Satzes 2.1 erfüllt. Die zugehörigen Travelling-Wave-Lösungen realisieren einen Martensit-Martensit Phasenübergang.

Da die Flächen E und F in Abbildung 2.4 gleichen Flächeninhalt haben, existiert auch in diesem Fall eine Travelling-Wave-Lösung. Hier liegt ein Martensit-Austenit Phasenübergang vor. Zu den Begriffen Martensit und Austenit siehe Falk [4 – 6] und Sprekels und Zheng [10].

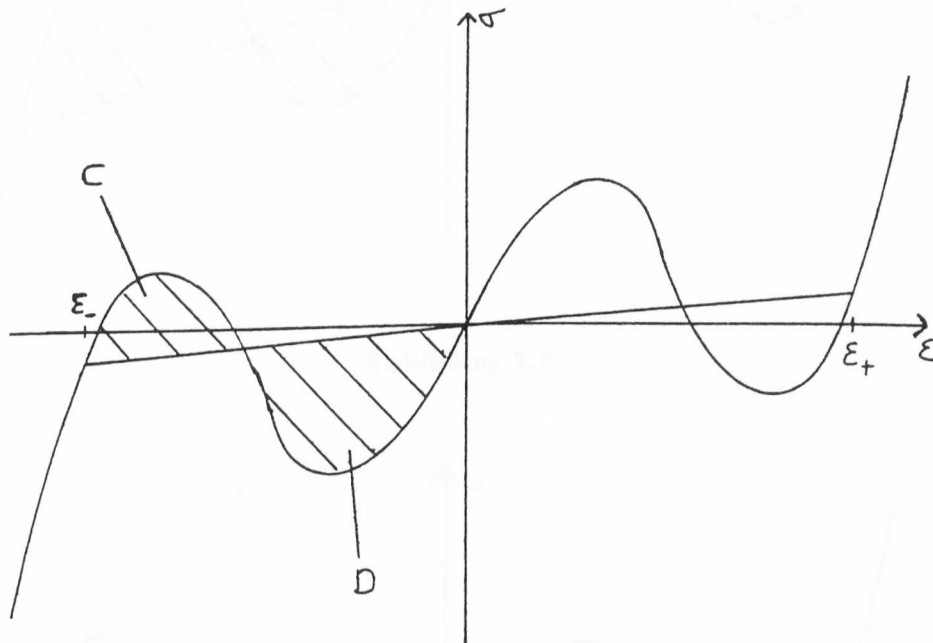


Abbildung 2.2

2.3 SINGULÄRER GRENZÜBERGANG ($\gamma \rightarrow 0$)

Bisher haben wir die Lösung noch nicht vollständig angegeben. Die Geschwindigkeit v ergibt sich aber aus ε mittels der ersten Gleichung aus (2). Es gilt also

$$(8) \quad v(z) = v_- - s(\varepsilon(z) - \varepsilon_-).$$

Zu einer Lösung ε der Gleichung (7) erhalten wir zwei Lösungen der Travelling-Wave-Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon'' &= \sigma - \sigma_- + s(v - v_-), \\ 0 &= s(\varepsilon - \varepsilon_-) + (v - v_-), \end{aligned}$$

je nachdem, ob wir s positiv oder negativ wählen. Die eine Welle bewegt sich mit positiver, die andere mit negativer Geschwindigkeit.

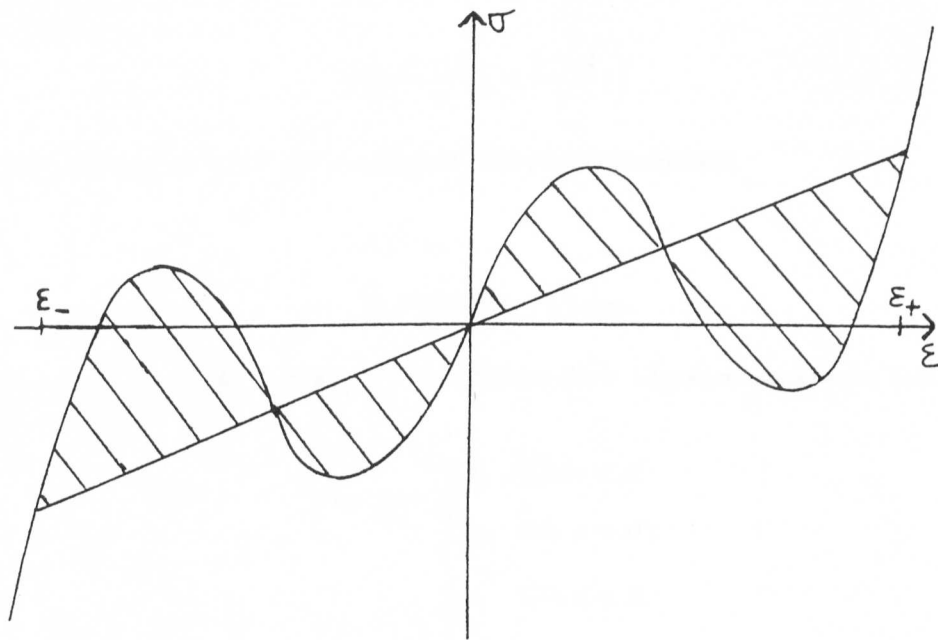


Abbildung 2.3

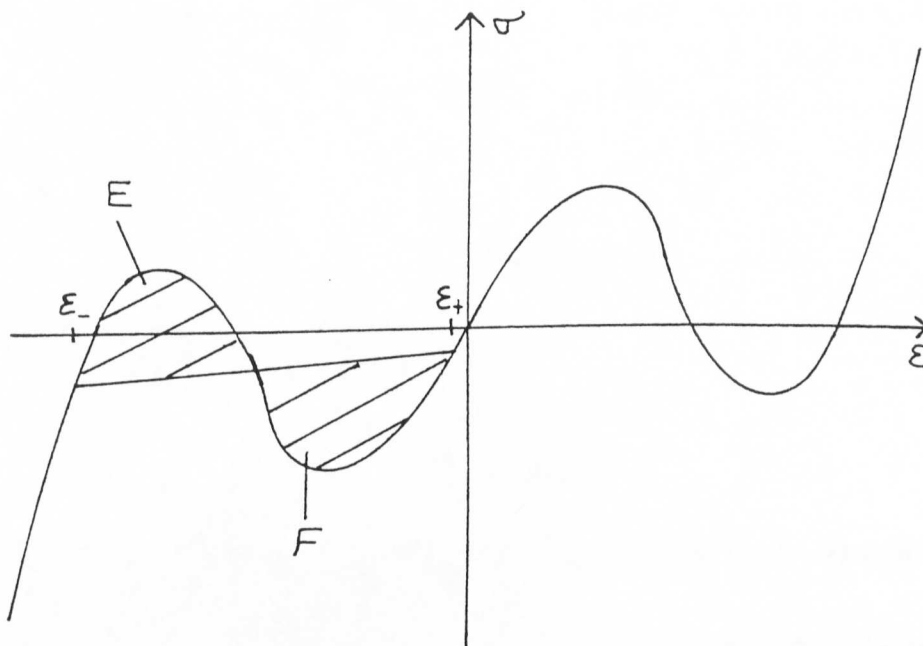


Abbildung 2.4

Das Paar

$$\left(\varepsilon\left(\frac{x-st}{\gamma}\right), v\left(\frac{x-st}{\gamma}\right) \right)$$

erfüllt (als Funktion von t und x aufgefaßt) das isotherme System

$$\varepsilon_t = v_x,$$

$$v_t = \sigma(\varepsilon, \bar{\theta})_x - \gamma^2 \varepsilon_{xxx}.$$

Lassen wir γ gegen Null streben, so konvergieren diese Lösungen punktweise fast überall gegen

$$\bar{\varepsilon}(x, t) := \begin{cases} \varepsilon_-, & \text{falls } x < st, \\ \varepsilon_+, & \text{falls } x > st, \end{cases}$$

$$\bar{v}(x, t) := \begin{cases} v_-, & \text{falls } x < st, \\ v_+, & \text{falls } x > st. \end{cases}$$

Es gilt

$$\sigma_+ - \sigma_- = s^2(\varepsilon_+ - \varepsilon_-).$$

Aus (8) folgt

$$(9) \quad s(\varepsilon_+ - \varepsilon_-) + (v_+ - v_-) = 0.$$

Es ergibt sich

$$(10) \quad s(v_+ - v_-) + (\sigma_+ - \sigma_-) = 0.$$

Damit ist $(\bar{\varepsilon}, \bar{v})$ eine schwache Lösung von

$$\varepsilon_t = v_x,$$

$$v_t = \sigma(\varepsilon, \bar{\theta})_x,$$

denn (9) und (10) sind gerade die Sprungbedingungen, die man aus der schwachen Formulierung des obigen Systems erhält (siehe Smoller [8]).

Bei hyperbolischen Gleichungen nennt man einen Schock zulässig, falls er Grenzwert von Travelling-Wave-Lösungen des zugehörigen viskosen Systems ist. Analog kann man einen Phasenübergang zulässig nennen, falls er Grenzwert von Travelling-Wave-Lösungen des mit $\gamma^2 u_{xxx}$ regularisierten Problems ist.

KAPITEL 3

CONLEY-INDEX UND EXISTENZ VON TRAVELLING-WAVE-LÖSUNGEN

In diesem Kapitel führen wir zunächst den Conley-Index ein und leiten einige Aussagen über ihn her, die wir in Abschnitt 3.2 benutzen, um einen weiteren Beweis für die Existenz isothermer Travelling-Wave-Lösungen zu geben. Die dabei konstruierten isolierenden Umgebungen werden im Kapitel 4 benötigt, um einen Existenzbeweis im nichtisothermen Fall zu führen.

3.1 CONLEY-INDEX

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, eine topologische Invariante für isolierte invariante Mengen zu definieren. Diese topologische Invariante soll zum einen eine Additionseigenschaft besitzen, die der Additionseigenschaft des Abbildungsgrades entspricht und zum anderen invariant sein gegen zulässige stetige Störungen. Die Additionseigenschaft wird uns später gestatten, Existenzaussagen für Travelling-Wave-Lösungen zu erhalten. Die in diesem Abschnitt behandelten Begriffe und Aussagen stammen zum großen Teil aus der Monographie von Conley [2] und dem Buch von Smoller [8]. Zu Aussagen und Definitionen gewöhnliche Differentialgleichungen betreffend siehe Amann [1].

Sei nun stets

$$y' = f(y)$$

ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit einem Lipschitz-stetigem

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}).$$

3.1 Definition:

- 1) Eine Teilmenge $J \subset \Omega$ heißt **invariant**, falls sie Vereinigung von Lösungskurven ist. Eine Menge J mit $J \subset N \subset \Omega$ heißt **maximal invariant in N** , falls es in N keine größere invariante Menge gibt.
- 2) Sei $N \subset \Omega$ kompakt und $I(N)$ die maximale invariante Menge in N . Falls $I(N) \subset \overset{\circ}{N}$, heißt N **isolierende Umgebung** und $I(N)$ **isolierte invariante Menge**.

3.2 Beispiele:

- 1) Eine Menge, die aus endlich vielen hyperbolischen Punkten besteht, ist eine isolierte invariante Menge.
- 2) Ist ein Ruhepunkt Zentrum eines Wirbels, so ist er nicht isoliert (siehe Abbildung 3.1).

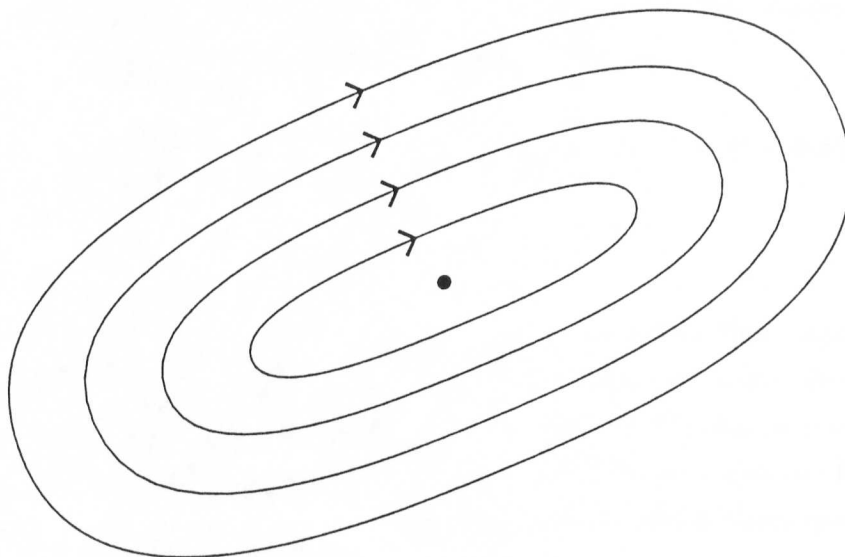


Abbildung 3.1

3.3 Bemerkung:

Eine kompakte Menge N ist isolierende Umgebung genau dann, wenn jeder Orbit, der ∂N berührt, nicht vollständig in N enthalten ist. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von isolierenden Umgebungen.

Um die oben erwähnte topologische Invariante zu definieren, benötigen wir Indexpaare, die wir im folgenden einführen.

3.4 Definition:

- 1) Sei $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ die eindeutige, nichtfortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(0) = \bar{y} \quad (\bar{y} \in \Omega).$$

Dann definieren wir

$$\bar{y} \cdot t := y(t) \quad \text{für alle } t \in (a, b),$$

$$\bar{y} \cdot S := y(S), \quad \text{für alle } S \subset (a, b).$$

2) Sei $W \subset V \subset \Omega$. Dann heißt W **positiv invariant** relativ zu V , falls für alle $\bar{y} \in W$ und für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\bar{y} \cdot [0, t] \subset V \implies \bar{y} \cdot [0, t] \subset W.$$

3) Sei N eine isolierende Umgebung und $I(N)$ die zugehörige maximale invariante Menge, dann heißt ein Paar (N_1, N_2) **Indexpaar** zu N , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) $N_1, N_2 \subset N$ sind kompakt und positiv invariant relativ zu N ,
- ii) $I(N) \subset (N_1 \setminus N_2)$,
- iii) Für alle $\bar{y} \in N_1$ mit $\bar{y} \cdot t \notin N$ (für ein $t \in \mathbb{R}^+$) existiert ein $t' \in [0, t]$, so daß $\bar{y} \cdot [0, t'] \subset N_1$ und $\bar{y} \cdot t' \in N_2$.

3.5 Beispiel:

In der Abbildung 3.2 ist die lokale Situation um einen hyperbolischen Ruhepunkt dargestellt, dessen Linearisierung einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt. Der Ruhepunkt selbst ist eine isolierte invariante Menge und das umgebende Quadrat ist eine isolierende Umgebung. Ein Indexpaar besteht zum Beispiel aus diesem Rechteck als erster Komponente und aus dem Teil des Randes, der dick herausgestellt ist, als zweiter Komponente.

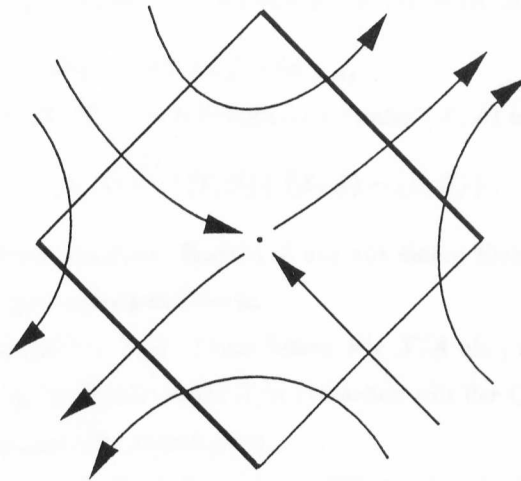


Abbildung 3.2

3.6 Satz:

Zu jeder isolierenden Umgebung N existiert ein Indexpaar.

Zum Beweis dieses Satzes siehe [2].

Um den Conley-Index zu definieren, brauchen wir noch einige topologische Grundbegriffe.

3.7 Definition:

1) Ein **topologisches Paar** ist ein geordnetes Paar (X, A) , bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Teilmenge A von X .

2) Das Kreuzprodukt von topologischen Paaren (X, A) und (Y, B) ist wie folgt definiert:

$$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

3) Seien (X, A) und (Y, B) topologische Paare. Eine Abbildung f von (X, A) nach (Y, B) ($f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$) ist eine stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$, so daß $f(A) \subset B$.

4) Zwei Abbildungen f und g von (X, A) nach (Y, B) heißen **homotop** ($f \sim g$), falls eine Abbildung

$$\Phi : (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (Y, B)$$

existiert, so daß für alle $x \in X$

$$\Phi(x, 0) = f(x) \text{ und } \Phi(x, 1) = g(x)$$

gilt.

5) Zwei topologische Paare (X, A) und (Y, B) heißen **homotopieäquivalent**

($(X, A) \sim (Y, B)$), falls Abbildungen

$$f : (X, A) \rightarrow (Y, B) \text{ und } g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$$

existieren, so daß $f \circ g \sim id_{(Y, B)}$ und $g \circ f \sim id_{(X, A)}$.

6) Die Homotopieklasse $[X, A]$ eines topologischen Paares (X, A) ist definiert durch

$$[X, A] := \{ (Y, B) \mid (X, A) \sim (Y, B) \}.$$

7) Sei (X, A) ein topologisches Paar. Besteht A nur aus einem Element, so spricht man von einem **punktierten topologischen Raum**.

8) Sei (X, A) ein topologisches Paar. Dann fassen wir X/A als punktierten topologischen Raum auf, indem wir im Quotientenraum X/A (versehen mit der Quotiententopologie) den Punkt A als zweite Komponente auszeichnen.

9) Wir definieren Summe $\vee$ und Produkt $\wedge$ von punktierten topologischen Räumen $(X, \{x_0\})$ und $(Y, \{y_0\})$ wie folgt:

$$(X, \{x_0\}) \vee (Y, \{y_0\}) := X \dot{\cup} Y / \{x_0, y_0\}$$

$$\text{und } (X, \{x_0\}) \wedge (Y, \{y_0\}) := X \times Y / ((X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)).$$

Dabei bezeichne $X \dot{\cup} Y$ die disjunkte Vereinigung der Mengen X und Y .

10) Seien $(X, \{x_0\})$ und $(Y, \{y_0\})$ punktierte topologische Räume. Dann definieren wir die Summe und das Produkt der zugehörigen Homotopieklassen folgendermaßen:

$$[X, \{x_0\}] \vee [Y, \{y_0\}] := [X \dot{\cup} Y / \{x_0, y_0\}]$$

$$\text{und } [X, \{x_0\}] \wedge [Y, \{y_0\}] := [X \times Y / ((X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y))].$$

Die Summe und das Produkt von Homotopieklassen in Definition 3.7.10 ist unabhängig von der Wahl von Repräsentanten und damit sind sie wohldefiniert. Mit den oben eingeführten topologischen Begriffen sind wir nun in der Lage, den Conley-Index zu definieren.

3.8 Definition (Conley-Index):

Sei I eine maximale invariante Menge und N eine zugehörige isolierende Umgebung. Weiterhin sei (N_1, N_2) ein Indexpaar zu N . Der **Conley-Index** $h(I)$ ist dann wie folgt definiert:

$$h(I) := [N_1/N_2].$$

In den folgenden Bemerkungen werden einige Eigenschaften des Conley-Index angegeben. Zum Beweis siehe Conley [2] und Smoller [8].

3.9 Bemerkungen (Existenz, Wohldefiniertheit, Additionseigenschaft):

- 1) Die Existenz des Conley-Index folgt aus der Existenz von Indexpaaren.
- 2) Zu einer isolierten invarianten Menge gibt es mehrere Indexpaare. Die Definition des Conley-Index ist jedoch unabhängig von der Wahl des Indexpaares.
- 3) Seien I_1 und I_2 isolierte invariante Mengen mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, dann gilt

$$h(I_1 \cup I_2) = h(I_1) \vee h(I_2).$$

Die Additionseigenschaft (3.9.3) wird später benutzt, um die Existenz von Travelling-Wave-Lösungen zu zeigen. Bevor wir nun zu einigen Beispielen kommen, sei noch eine Bemerkung gemacht, die bei der Berechnung des Conley-Index hilfreich ist.

3.10 Bemerkung:

Es seien (N_1, N_2) , (M_1, M_2) und (O_1, O_2) topologische Paare. Gilt

$$(N_1, N_2) \sim (M_1, M_2) \quad \text{und} \quad M_1/M_2 \sim (O_1, O_2),$$

so folgt

$$N_1/N_2 \sim (O_1, O_2).$$

Das bedeutet, daß alle Elemente einer Homotopieklasse bei Quotientenbildung in Elemente der gleichen Homotopieklasse übergehen.

3.11 Beispiel:

Betrachten wir nun wieder den Fall eines hyperbolischen Punktes aus Abbildung 3.2. Wir hatten schon gesehen, daß ein zugehöriges Indexpaar aus dem gesamten Rechteck als erster Komponente, zusammen mit zwei einander gegenüberliegenden Seiten als zweiter Komponente besteht. Dieses topologische Paar ist homotopieäquivalent zu einem Intervall, in dem beide Endpunkte ausgezeichnet sind. Geht man nun zum Quotienten über, so erhält man $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, bei der ein Punkt ausgezeichnet ist.



Abbildung 3.3

Das motiviert die nächste Definition.

3.12 Definition:

1) Mit Σ^n sei die Homotopieklasse der punktierten $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet, d.h.

$$\Sigma^n := [S^n, \{P\}] \quad \text{mit } P \in S^n.$$

2) Weiterhin seien

$$\bar{0} := [\{P\}, \{P\}],$$

$$\bar{1} := \Sigma^0.$$

Es sei bemerkt, daß $\bar{0}$ und $\bar{1}$ die neutralen Elemente der Summe $\vee$ bzw. des Produktes $\wedge$ von Homotopieklassen sind.

3.13 Proposition:

Sei $\bar{y}$ ein hyperbolischer Punkt einer Differentialgleichung $y' = f(y)$, so daß $Df(\bar{y})$ genau k Eigenwerte mit positiven Realteil hat. Dann ist $\{\bar{y}\}$ eine isolierte invariante Menge, und es gilt

$$h(\{\bar{y}\}) = \Sigma^k.$$

Zum Beweis siehe Smoller [8].

3.2 EXISTENZ VON TRAVELLING-WAVE-LÖSUNGEN IM ISOTHERMEN FALL

Im folgenden sei angenommen, daß

$$F(\theta, \varepsilon, \varepsilon_x) := F_0(\theta) + \alpha_1(\theta - \theta_1)\varepsilon^2 + \alpha_2\varepsilon^4 + \frac{\gamma^2}{2}\varepsilon_x^2.$$

Die Überlegungen in diesem Abschnitt lassen sich auch für allgemeinere freie Energien F durchführen. Auf mögliche Verallgemeinerungen werden wir am Ende des Abschnittes noch einmal eingehen. Wir betrachten wieder den isothermen Fall, d.h. $\theta \equiv \bar{\theta} \in \mathbb{R}^+$. Da wir an Travelling-Wave-Lösungen interessiert sind, die Phasenübergänge realisieren, sei $\bar{\theta}$ so gewählt, daß $\sigma = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$ nichtmonoton ist. Dann entsprechen die beiden monotonen Zweige von σ den verschiedenen Phasen. Schreiben wir die in den vorhergehenden Kapiteln hergeleitete isotherme Gleichung als System erster Ordnung, so erhalten wir (siehe Gleichung (6))

$$(11) \quad \begin{aligned} \varepsilon' &= w, \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \bar{\theta}) - \sigma(\varepsilon_-, \bar{\theta}) - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-). \end{aligned}$$

Die Ruhepunkte des Systems erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \sigma - \sigma_- &= s^2(\varepsilon - \varepsilon_-) \end{aligned}$$

dabei sei $\sigma = \sigma(\varepsilon, \bar{\theta})$ und $\sigma_- := \sigma(\varepsilon_-, \bar{\theta})$. Damit überhaupt Travelling-Wave-Lösungen existieren, muß die zweite Gleichung mehr als eine Lösung besitzen. Im weiteren sei ohne Einschränkung $\varepsilon_- < 0$ vorausgesetzt. Außerdem wählen wir ε_- so, daß $\sigma_- < 0$ ist. Im Fall $\sigma_- > 0$ existiert keine Lösung, was wir schon im Kapitel 2 gezeigt haben. Ist $\sigma_- = 0$ existiert eine Lösung. Aus technischen Gründen schließen wir diesen Fall allerdings aus. Es seien

$$\begin{aligned} s_{min} &:= \inf \{ s \in \mathbb{R}^+ \mid \sigma(\varepsilon, \bar{\theta}) - \sigma_- = s^2(\varepsilon - \varepsilon_-) \text{ hat drei Lösungen} \}, \\ s_{max} &:= \sup \{ s \in \mathbb{R}^+ \mid \sigma(\varepsilon, \bar{\theta}) - \sigma_- = s^2(\varepsilon - \varepsilon_-) \text{ hat drei Lösungen} \}. \end{aligned}$$

Seien $\varepsilon_- < \varepsilon_M(s) < \varepsilon_+(s)$ die drei Lösungen der Gleichung (12), die für alle $s \in (s_{min}, s_{max})$ existieren.

3.14 Satz:

Es existiert ein $\bar{s} \in (s_-, s_+)$, so daß das System

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= w, \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \bar{\theta}) - \sigma(\varepsilon_-, \bar{\theta}) - \bar{s}^2(\varepsilon - \varepsilon_-)\end{aligned}$$

eine Travelling-Wave-Lösung besitzt, für die gilt

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow -\infty} (\varepsilon, w)(z) &= (\varepsilon_-, 0) \\ \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (\varepsilon, w)(z) &= (\varepsilon_+(\bar{s}), 0).\end{aligned}$$

Beweis:

Sei

$$H(\varepsilon, s) := \int_{\varepsilon_-}^{\varepsilon} [\sigma(\tau, \bar{\theta}) - \sigma_- - s^2(\tau - \varepsilon_-)] d\tau.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{s \searrow s_{\min}} H(\varepsilon_+(s), s) &> 0 \\ \text{und} \quad \lim_{s \nearrow s_{\max}} H(\varepsilon_+(s), s) &< 0.\end{aligned}$$

Es seien jetzt s_- in der Nähe von $s_{\min}$ und s_+ in der Nähe von $s_{\max}$ so gewählt, daß

$$\begin{aligned}(12) \quad & s_{\min} < s_- < s_+ < s_{\max}, \\ & H(\varepsilon_+(s_-), s_-) > 0 \quad \text{und} \\ & H(\varepsilon_+(s_+), s_+) < 0.\end{aligned}$$

*da durch die erste Bedingung
daß die in der ersten
Umgebung von $s_{\min}$ die
Gleichung aus Abb. 3.4
nicht*

Im folgenden wollen wir eine Idee von Conley und Gardner [3] ausnutzen, die die Additive Eigenschaft des Conley-Index benutzt. Wir führen nun eine zusätzliche Gleichung für s ein

$$\begin{aligned}(13) \quad & \varepsilon' = w, \\ & w' = \sigma(\varepsilon, \bar{\theta}) - \sigma(\varepsilon_-, \bar{\theta}) - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-), \\ & s' = \beta \Psi(\varepsilon, w, s) \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Dabei sei Ψ eine Lipschitz-stetige Funktion, die positiv sei in einer Umgebung U_1 von $(\varepsilon_-, 0, s_-)$ und einer Umgebung U_2 von $(\varepsilon_+(s_+), 0, s_+)$, sowie negativ in einer Umgebung U_3 von $(\varepsilon_-, 0, s_+)$ und einer Umgebung U_4 von $(\varepsilon_+(s_-), 0, s_-)$. Später werden noch genauere Voraussetzungen an diese Umgebungen gemacht werden. Ansonsten sei Ψ identisch Null. Wir werden für das System (13) die Existenz von Lösungen zeigen, die Ruhepunkte

miteinander verbinden. Dann zeigen wir, daß die Lösungen von (13) für β gegen 0 gegen eine Travelling-Wave-Lösung konvergieren.

Für das um s erweiterte System wollen wir nun eine isolierende Umgebung angeben. Zunächst sei

$$N(s) := \left\{ (\varepsilon, w) \mid \varepsilon_- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_+(s), \left(\frac{1}{2}w^2 - H(\varepsilon, s) \right) \leq C(s), w \geq 0 \right\} \cup M_-(s) \cup M_+(s) \cap M(s).$$

Dabei seien

$$\begin{aligned} M_-(s) &:= \{(\varepsilon, w) \mid |\varepsilon - \varepsilon_-| + |w| \leq \delta(s)\}, \\ M_+(s) &:= \{(\varepsilon, w) \mid |\varepsilon - \varepsilon_+(s)| + |w| \leq \delta(s)\}, \\ M(s) &:= \{(\varepsilon, w) \mid \frac{1}{2}w^2 - H(\varepsilon, s) \leq -H(\varepsilon_M(s), s) + \delta(s)\}. \end{aligned}$$

Die Schranke δ sei eine stetige, positive Funktion von s und sei so klein gewählt, daß $M_-(s)$ und $M_+(s)$ isolierende Umgebungen für $(\varepsilon_-, 0)$ bzw. $(\varepsilon_+(s), 0)$ sind. Außerdem soll $\delta(s)$ so klein sein, daß $M_-(s), M_+(s)$ und $M(s)$ einen leeren Schnitt haben. Die Schranke C sei positiv, stetig in s und erfülle

$$C(s) > \max\{0, -H(\varepsilon_+(s), s)\}.$$

Zur Veranschaulichung der Menge $N(s)$ siehe Abbildung 3.4.

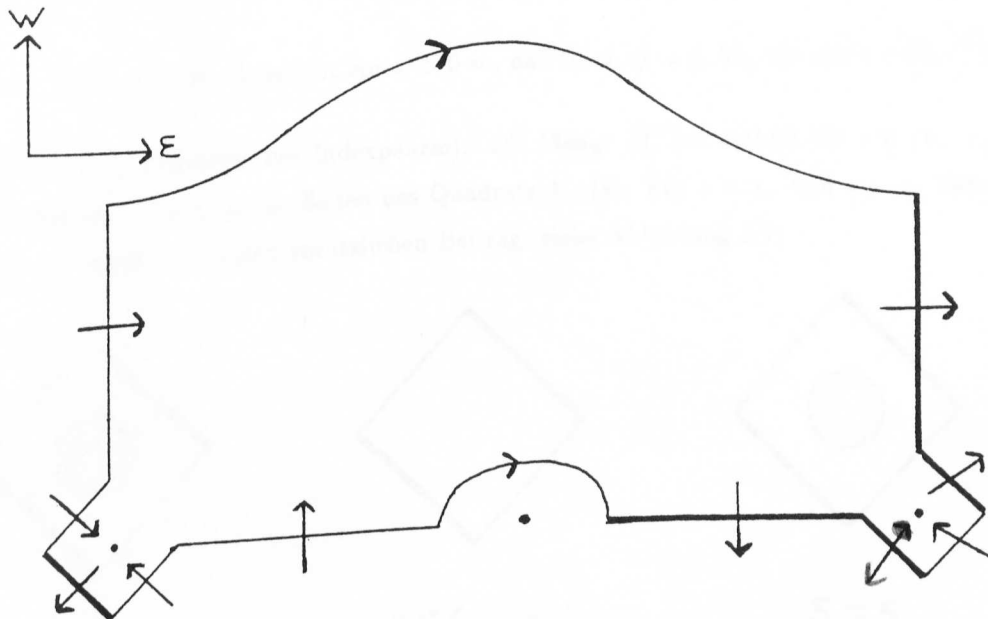


Abbildung 3.4

Wir definieren nun

$$N := \bigcup_{s \in [s_-, s_+]} N(s) \times \{s\}$$

$$M_- := \bigcup_{s \in [s_-, s_+]} M_-(s) \times \{s\}$$

$$M_+ := \bigcup_{s \in [s_-, s_+]} M_+(s) \times \{s\}.$$

Als weitere Eigenschaft von Ψ verlangen wir

$$\text{supp} \Psi \cap \{(\varepsilon, w, s) \in \mathbb{R}^3 \mid s \in [s_-, s_+]\} \subset M_- \cup M_+.$$

Mit dieser Wahl von Ψ sind N, M_- und M_+ isolierende Umgebungen. Die obige Wahl von Ψ garantiert, daß kein Ruhepunkt mehr auf dem Rand von N liegt. Seien nun $I(N), I(M_-)$ und $I(M_+)$ die maximalen invarianten Mengen in N, M_- und M_+ .

Behauptung:

- 1) $h(I(M_-)) = \Sigma^2,$
- 2) $h(I(M_+)) = \Sigma^1,$
- 3) $h(I(N)) = \bar{0}.$

zu 1): Um den Conley-Index zu berechnen, müssen wir ein Indexpaar zu M_- finden. Als erste Komponente wählen wir M_- selbst. Die zweite Komponente muß auf jeden Fall die Menge

$$M_-^E := \{(\varepsilon, w, s) \in M_- \mid \text{es gibt ein } z' > 0 \text{ so, daß } (\varepsilon, w, s) \cdot z \notin M_- \text{ für alle } z \in (0, z']\}$$

enthalten (nach Definition des Indexpaares). Die Menge $M_-^E(s)$ enthält für $s \in (s_-, s_+)$ genau zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrats $M_-(s)$. Für $s = s_-$ und $s = s_+$ liefert die Menge $\text{supp} \Psi$ noch einen zusätzlichen Beitrag (siehe Abbildung 3.5).

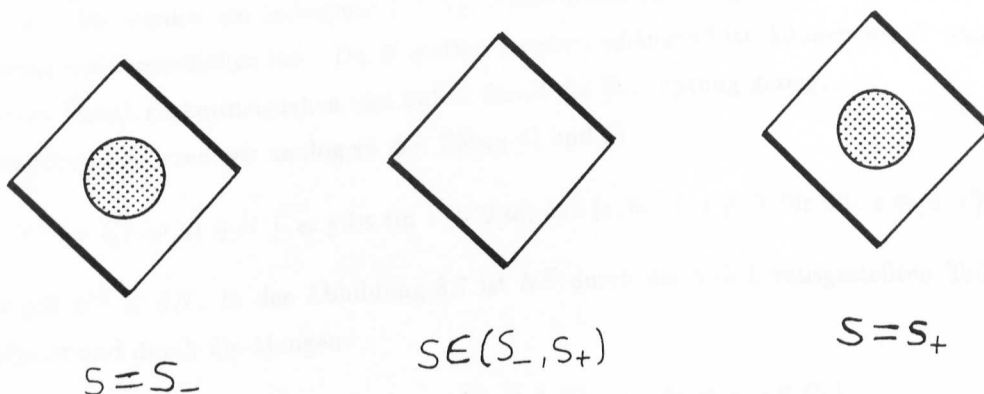


Abbildung 3.5

Die Menge M_-^E ist aber als zweite Komponente des Indexpaares noch nicht geeignet. Wir brauchen eine abgeschlossene Menge, die positiv invariant relativ zu M_- ist. Dies bedeutet, daß wir den Rand der Menge $\text{supp}\Psi$ noch hinzunehmen müssen (bisher gehörte nur ein Teil des Randes zu M_-^E), sowie alle Orbits, die $\text{supp}\Psi$ aus dem Rand heraus verlassen, solange bis sie M_- verlassen. Die so entstandene Menge ist in Abbildung 3.6 dargestellt.

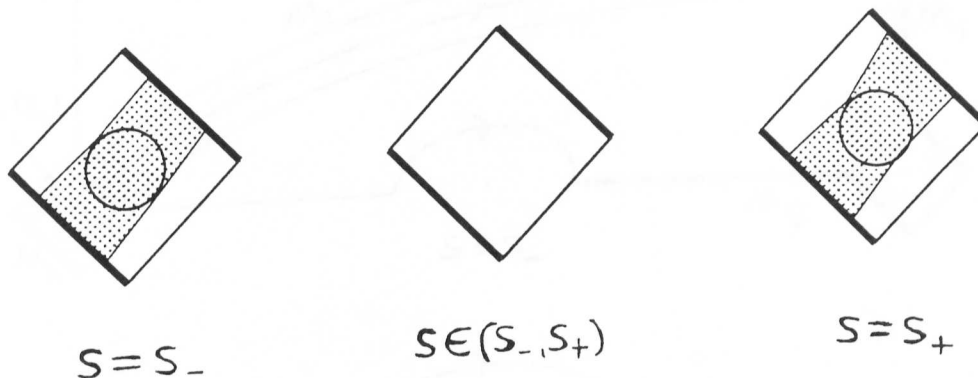


Abbildung 3.6

Das aus M_- und dieser Menge bestehende Paar erfüllt die Voraussetzungen aus der Definition von Indexpaaren. Dieses Indexpaar ist homotopieäquivalent zu einem Quader, bei dem vier Seitenflächen ausgezeichnet sind, von denen sich jeweils zwei gegenüberliegen. Bilden wir nun den Quotienten, so erhalten wir ein Element aus der Homotopieklasse Σ^2 . Die Bemerkung 3.10 liefert dann die Behauptung.

zu 2): Sei M_+^E analog zu 1) definiert. In diesem Fall gehören zu $M_+^E(s)$ ($s \in [s_-, s_+]$) genau zwei gegenüberliegende Seiten. Die Funktion Ψ ist so gewählt, daß $M_+(s_-)$ und $M_+(s_+)$ keinen zusätzlichen Beitrag leisten. Das Paar (M_+, M_+^E) ist damit ein Indexpaar. Dieses Paar ist homotopieäquivalent zu einem Intervall, bei dem die Eckpunkte ausgezeichnet sind. Gehen wir nun zum Quotienten über, so erhalten wir

$$h(I(M_+)) = \Sigma^1.$$

zu 3): Wir werden ein Indexpaar (N, N_2) konstruieren und zeigen, daß sich N_2 auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Da N einfach zusammenhängend ist, können wir N dann auf diesen Punkt zusammenziehen und haben damit die Behauptung gezeigt. Zunächst definieren wir analog zu den Fällen 1) und 2)

$$N^E := \{(\varepsilon, w, s) \in N \mid \text{es gibt ein } z' > 0 \text{ so, daß } (\varepsilon, w, s) \cdot z \notin N \text{ für alle } z \in (0, z']\}.$$

Es gilt $N^E \subset \partial N$. In der Abbildung 3.7 ist N^E durch die dick herausgestellten Teile des Randes und durch die Mengen

$$U_1(s_-) := \{(\varepsilon, w) \in N(s_-) \mid (\varepsilon, w, s_-) \in U_1\}$$

und

$$U_3(s_+) := \{(\varepsilon, w) \in N(s_+) \mid (\varepsilon, w, s_+) \in U_3\}$$

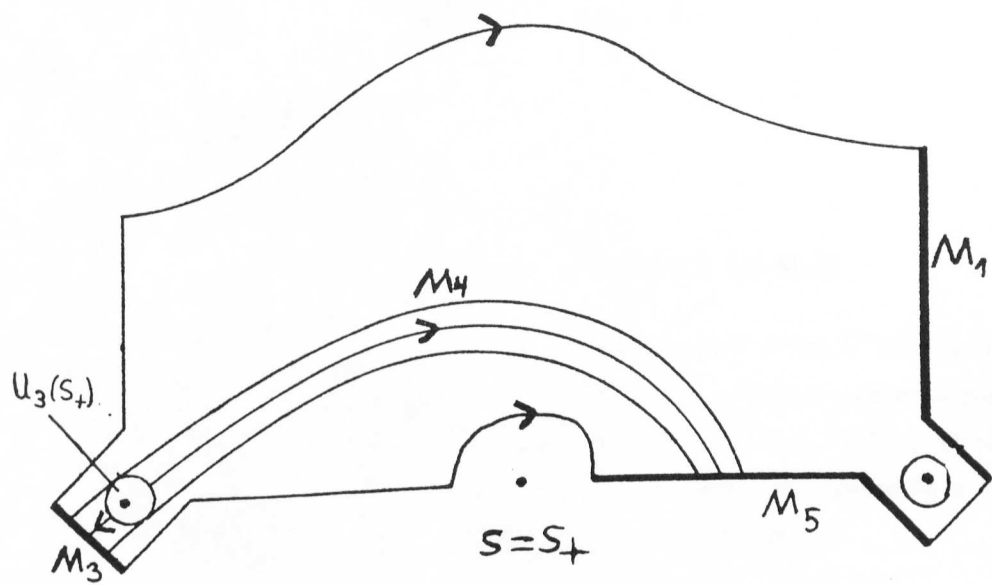
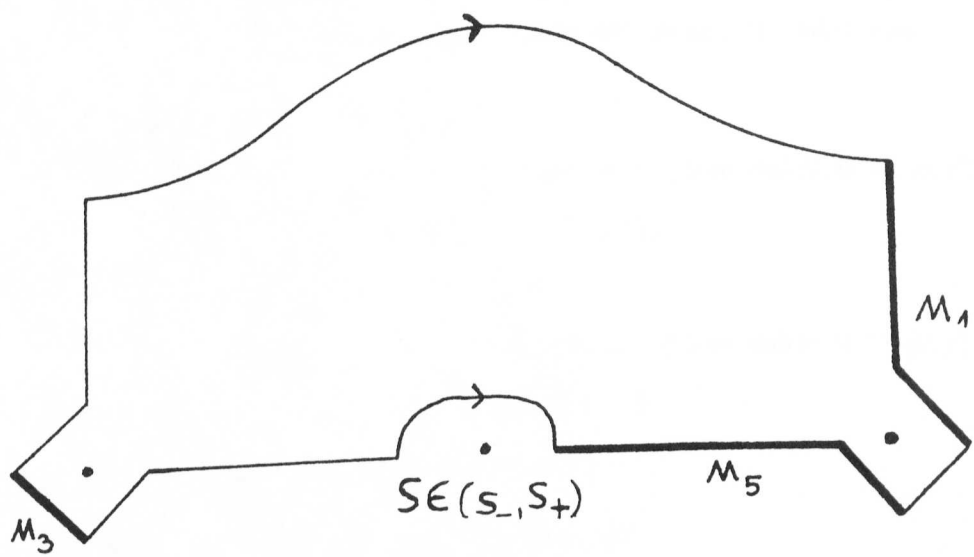
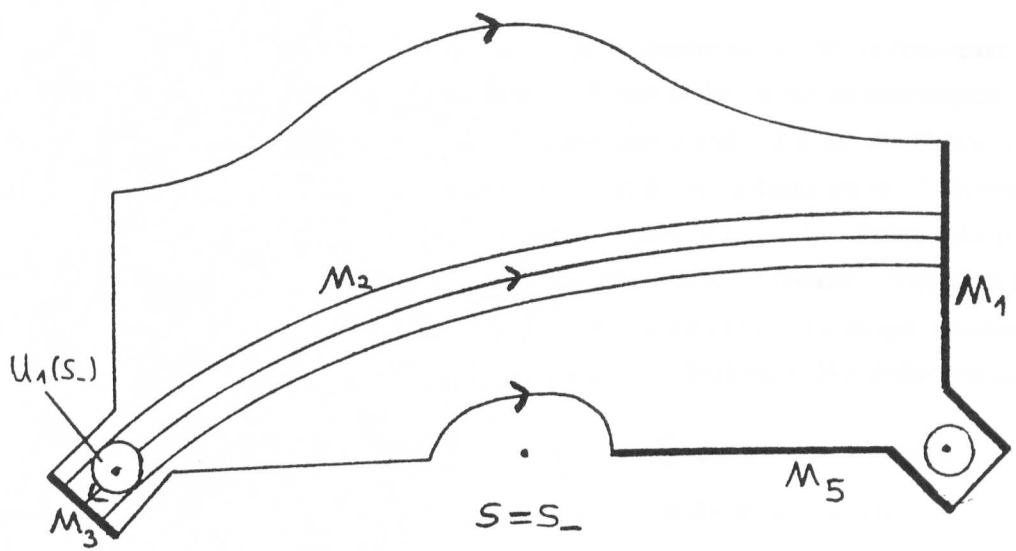


Abbildung 3.7

dargestellt. Wir wollen N^E nun so erweitern, daß es zusammen mit N ein Indexpaar bildet. Dazu bilden wir zunächst den Abschluß von N^E und schließen die so entstandene Menge dann positiv invariant relativ zu N ab. Dies bedeutet gerade, daß wir die Orbits, die aus dem Rand von $U_1(s_-)$ bzw. $U_3(s_+)$ laufen, hinzunehmen, solange sie in N bleiben. Die Ungleichungen in (12) liefern, daß die instabilen Orbits, die aus dem Ruhepunkt $(\varepsilon_-, \theta_-)$ laufen, für $s = s_-$ und $s = s_+$ gerade das in der Abbildung 3.7 skizzierte Verhalten haben. Falls wir den Träger von Ψ klein genug wählen, haben die Orbits, die $\text{supp}\Psi$ verlassen, aus Stetigkeitsgründen das in der Abbildung 3.7 dargestellte Verhalten. Wir definieren wie folgt

$$N_2 := \overline{N^E} \cup \{(\varepsilon, w, s) \in N \mid \exists(\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \in \overline{N^E} \text{ und ein } z' > 0 \text{ so, daß} \\ (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \cdot (0, z'] \subset N \text{ und } (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \cdot z' = (\varepsilon, w, s)\}.$$

Damit wird (N, N_2) zu einem Indexpaar. Die Menge N_2 kann man nun entlang der Mengen M_1 bis M_5 auf einen Punkt zusammenziehen (siehe Abbildung 3.7). Dabei seien

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(\varepsilon, w, s) \in N_2 \mid w \geq 0, \varepsilon \geq \varepsilon_+(s)\}, \\ M_2 &:= \{(\varepsilon, w, s) \in N_2 \mid s = s_-, \exists(\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \in \overline{U_1} \text{ und ein } z' \geq 0 \text{ so, daß } (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \cdot [0, z'] \subset N \\ &\quad \text{und } (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \cdot z' = (\varepsilon, w, s)\}, \\ M_3 &:= \{(\varepsilon, w, s) \in N_2 \mid w \leq 0 \text{ und } \varepsilon \leq \varepsilon_-\}, \\ M_4 &:= \{(\varepsilon, w, s) \in N_2 \mid s = s_+, \exists(\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \in \overline{U_3} \text{ und ein } z' \geq 0 \text{ so, daß } (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \cdot [0, z'] \subset N \\ &\quad \text{und } (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{s}) \cdot z' = (\varepsilon, w, s)\}, \\ M_5 &:= \{(\varepsilon, w, s) \in N_2 \mid w \leq 0, \varepsilon_M(s) \leq \varepsilon \leq \varepsilon_+(s)\}. \end{aligned}$$

Da man N auf diesen Punkt zusammenziehen kann, gilt

$$h(I(N)) = [N/N_2] = \bar{0}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Wir haben somit gezeigt, daß

$$h(I(N)) = \bar{0} \neq \Sigma^2 \vee \Sigma^1 = h(I(M_-)) \vee h(I(M_+)).$$

Die obige Ungleichung gilt, da Elemente aus der Homotopieklasse von $\Sigma^2 \vee \Sigma^1$ nicht einfach zusammenhängend sind und die Menge somit nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Damit ist gezeigt, daß $I(N)$ größer sein muß, als $I(M_-) \cup I(M_+)$. Daraus folgt die Existenz einer Lösung $(\varepsilon_\beta, w_\beta, s_\beta)$ von (13), die in N , aber nicht vollständig in $M_- \cup M_+$ verläuft. Wir wählen $(\varepsilon_\beta, w_\beta, s_\beta)$ ohne Einschränkung so, daß gilt:

$$(\varepsilon_\beta, w_\beta, s_\beta)(0) \in N \setminus (M_- \cup M_+).$$

Da die Folge $(\varepsilon_\beta, w_\beta, s_\beta)$ ganz in N liegt, bleibt sie gleichmäßig beschränkt. Da $(\varepsilon_\beta, w_\beta, s_\beta)$ Lösung der Differentialgleichung (13) ist und die rechte Seite auf dem Definitionsbereich der Lösung gleichmäßig beschränkt ist, bleiben auch die Ableitungen gleichmäßig beschränkt. Wir können also eine Teilfolge auswählen (die wir wieder mit $(\varepsilon_\beta, w_\beta, s_\beta)$ bezeichnen), die auf Kompakta gleichmäßig konvergiert (Satz von Arzelà–Ascoli). Sei

$$(\varepsilon, w, s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

die Grenzlösung. Die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta reicht aus, um zu schließen, daß (ε, w, s) der Differentialgleichung

$$\varepsilon' = w$$

$$w' = \sigma(\varepsilon, \bar{\theta}) - \sigma(\varepsilon_-, \bar{\theta}) - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-)$$

$$s' = 0$$

genügt. Dazu betrachtet man die zur Differentialgleichung äquivalente Volterra-Integralgleichung und geht dort zur Grenze über. Es gilt $s \equiv \bar{s}$ ($\bar{s} \in \mathbb{R}^+$). Es bleibt zu zeigen, daß die Grenzlösung einen Orbit definiert, der die beiden Ruhepunkte verbindet. Wir wissen

$$(\varepsilon, w, s)(0) \leftarrow (\varepsilon_\beta, w_\beta, s_\beta)(0) \in N \setminus (M_- \cup M_+).$$

Daraus folgt

$$(\varepsilon, w, s)(0) \in \overline{N \setminus (M_- \cup M_+)}.$$

Hieraus folgt, daß (ε, w) nicht ganz in $M_-(\bar{s}) \cup M_+(\bar{s})$ liegen kann (denn dann wären $M_-(\bar{s})$ oder $M_+(\bar{s})$ keine isolierenden Umgebungen). Solange (ε, w) in $N(\bar{s}) \setminus (M_-(\bar{s}) \cup M_+(\bar{s}))$ liegt, ist ε monoton steigend. Also muß (ε, w) für $z \rightarrow \infty$ in $M_+(\bar{s})$ hineinlaufen. Da (ε, w) ganz in N bleibt, muß

$$(\varepsilon, w)(z) \rightarrow (\varepsilon_+(\bar{s}), 0) \quad \text{für} \quad z \rightarrow \infty.$$

Entsprechend folgt

$$(\varepsilon, w)(z) \rightarrow (\varepsilon_-, 0) \quad \text{für} \quad z \rightarrow -\infty.$$

Damit ist die Behauptung des Satzes gezeigt.

q.e.d.

In den folgenden Bemerkungen gehen wir auf mögliche Verallgemeinerungen ein.

3.15 Bemerkungen:

1) Der Beweis des Satzes 3.14 hängt nicht von der speziellen Wahl von σ ab. Er läßt sich für alle σ übertragen, für die gilt:

Es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so daß

$$\begin{aligned}\sigma'(\varepsilon) &> 0 && \text{für } \varepsilon \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty), \\ \sigma'(\varepsilon) &< 0 && \text{für } \varepsilon \in (\alpha, \beta).\end{aligned}$$

2) Die Techniken dieses Kapitels lassen sich mit einigen naheliegenden Änderungen benutzen, um Existenz von Martensit–Austenit Phasenübergängen zu beweisen (siehe die Situation wie sie in Abbildung 2.4 dargestellt ist).

Hat die Spannung σ die Gestalt aus Abbildung 2.3, so lassen sich die Methoden dieses Kapitels übertragen, indem man die isolierende Umgebung und die Gleichung für s geeignet anpaßt, um auch in diesem Fall Existenz von Travelling–Wave–Lösungen zu zeigen.

KAPITEL 4
EXISTENZ VON TRAVELLING-WAVE-LÖSUNGEN IM NICHTISOTHERMEN FALL

In diesem Kapitel zeigen wir die Existenz nichtisothermer Travelling-Wave-Lösungen. Zur Erinnerung geben wir noch einmal die Gleichungen im nichtisothermen Fall an:

$$(14) \quad \begin{aligned} \varepsilon' &= w, \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \theta) - \sigma(\varepsilon_-, \theta_-) - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-), \\ \theta' &= \frac{\gamma s}{\kappa} \left[-\bar{U} + \bar{U}_- + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right]. \end{aligned}$$

Wie schon in Kapitel 3.2, so betrachten wir auch hier freie Energien der Form

$$(15) \quad F(\theta, \varepsilon, \varepsilon_x) = F_0(\theta) + \alpha_1(\theta - \theta_1)\varepsilon^2 + \alpha_2\varepsilon^4 + \frac{\gamma^2}{2}\varepsilon_x^2 \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Für $\theta < \theta_1$ ist F als Funktion von ε ein Doppelwellenpotential, während F für $\theta > \theta_1$ ein konvexes Potential ist. In den Anwendungen setzt man in der Regel F_0 wie folgt an

$$F_0(\theta) = c_v(-\theta \ln \theta + \theta).$$

Dabei ist c_v die spezifische Wärme. Zur Vereinfachung wählen auch wir diesen Ansatz. Aus der freien Energie ergeben sich die folgenden Größen

$$(16) \quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = 2\alpha_1(\theta - \theta_1)\varepsilon + 4\alpha_2\varepsilon^3, \\ S &= -\frac{\partial F}{\partial \theta} = c_v \ln \theta - \alpha_1\varepsilon^2, \\ \bar{U} &= F + \theta S - \frac{\gamma^2}{2}\varepsilon_x^2 = c_v\theta + \alpha_2\varepsilon^4 - \alpha_1\theta_1\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Damit nimmt das obige System (14) die folgende Gestalt an

$$(17) \quad \begin{aligned} \varepsilon' &= w, \\ w' &= 2\alpha_1(\theta - \theta_1)\varepsilon + 4\alpha_2\varepsilon^3 - \sigma_- - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-), \\ \theta' &= \frac{\gamma s}{\kappa} \left[-c_v(\theta - \theta_-) - \alpha_2\varepsilon^4 + \alpha_1\theta_1\varepsilon^2 + \alpha_2\varepsilon_-^4 - \alpha_1\theta_1\varepsilon_-^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right]. \end{aligned}$$

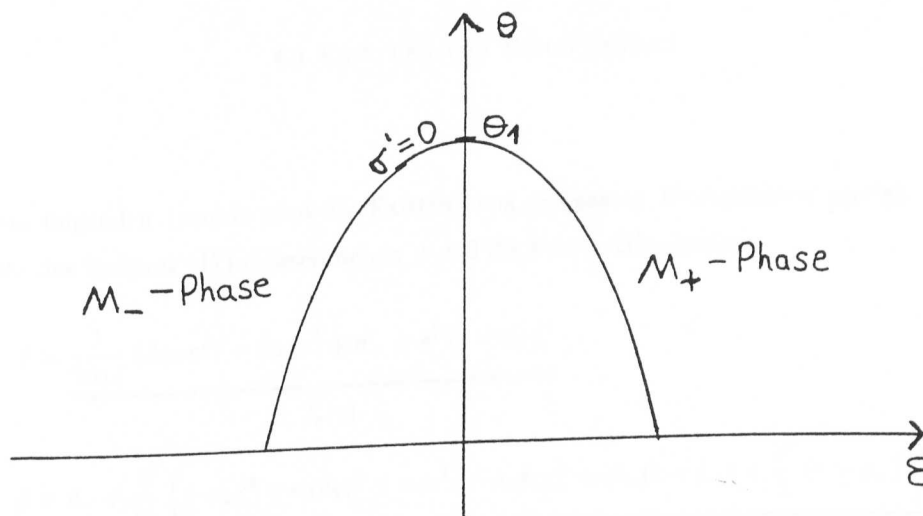


Abbildung 4.1

Für $\theta < \theta_1$ ist σ keine monotone Funktion von ε . Es treten zwei Zweige auf, in denen σ monoton steigend ist, die jeweils verschiedenen Phasen entsprechen (siehe Abbildung 4.1). Wir wollen die Existenz von Travelling-Wave-Lösungen zeigen, die Zustände aus verschiedenen Phasen miteinander verbinden. Aus diesem Grund beschränken wir uns mit Randdaten auf Temperaturen unterhalb des kritischen Wertes θ_1 . Außerdem wählen wir wieder ohne Einschränkung $\varepsilon_- < 0$.

Das weitere Vorgehen ist nun wie folgt:

Zunächst werden wir die Existenz von geeigneten Ruhepunkten zeigen. Dann wird die Existenz einer Ljapunovfunktion für das System (17) gezeigt. Die Ljapunovfunktion wird später dazu benutzt, um die isolierende Umgebung zu definieren. Indem wir, analog zum Vorgehen in Kapitel 3.2, die Differentialgleichung (17) um eine Gleichung für s erweitern und wieder die Additionseigenschaft des Conley-Index ausnutzen, zeigen wir schließlich die Existenz einer Travelling-Wave-Lösung. Das Ergebnis ist in dem folgenden Satz zusammengefaßt.

4.1 Satz:

Ist c_v hinreichend groß und $\frac{\gamma}{\kappa}$ klein, so besitzt die Differentialgleichung (17) Travelling-Wave-Lösungen, die Zustände aus verschiedenen Phasen miteinander verbinden.

Die genauen Bedingungen an $\frac{\gamma}{\kappa}$ und c_v ergeben sich im Beweis des Satzes.

4.1 EXISTENZ VON RUHEPUNKTEN

In dem folgenden Lemma wird die Existenz von geeigneten Ruhepunkten gezeigt. Ruhepunkte des Systems (17) müssen neben $w = 0$ die beiden Gleichungen

$$\theta = \underbrace{\frac{1}{2\alpha_1\epsilon} (2\alpha_1\epsilon\theta_1 - 4\alpha_2\epsilon^3 + \sigma_- + s^2(\epsilon - \epsilon_-))}_{=: f_s(\epsilon)}$$

$$\theta = \theta_- + \underbrace{\frac{1}{c_v} \left(-\alpha_2\epsilon^4 + \alpha_1\theta_1\epsilon^2 + \alpha_2\epsilon_-^4 - \alpha_1\theta_1\epsilon_-^2 + \sigma_- (\epsilon - \epsilon_-) + \frac{s^2}{2} (\epsilon - \epsilon_-)^2 \right)}_{=: g_s(\epsilon)}$$

erfüllen. Wir wählen jetzt s_- und s_+ wie in Kapitel 3.2 (für $\bar{\theta} = \theta_-$).

4.2 Lemma:

Wählt man c_v hinreichend groß, so existieren für alle $s \in [s_-, s_+]$ Ruhepunkte $(\epsilon_-, 0, \theta_-)$, $(\bar{\epsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s))$ und $(\bar{\epsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s))$ des Systems (17), für die gilt:

- 1) $\epsilon_- < \bar{\epsilon}_M(s) < \bar{\epsilon}_+(s)$ und es gibt keinen weiteren Ruhepunkt $(\tilde{\epsilon}, 0, \tilde{\theta})$ mit $\tilde{\epsilon} \in [\epsilon_-, \bar{\epsilon}_+(s)]$,
- 2) θ_- , $\bar{\theta}_M(s)$, $\bar{\theta}_+(s)$ sind positiv,
- 3) $f'_s(\epsilon_-) > g'_s(\epsilon_-)$ und $f'_s(\bar{\epsilon}_+(s)) < g'_s(\bar{\epsilon}_+(s))$.

Beweis:

Die Funktion f_s hat für Parameterwerte s mit $s^2 \in \left[s_-^2, \frac{\sigma_-}{\epsilon_-} \right)$ die Gestalt wie in Abbildung

4.2. Dies folgt, da

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_s(\epsilon) = \frac{\sigma_- - s^2\epsilon_-}{2\alpha_1}.$$

Woraus folgt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} f_s(\epsilon) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0-} f_s(\epsilon) = \infty.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \pm\infty} f_s(\epsilon) = -\infty.$$

Eine Kurvendiskussion von f_s ergibt die Lage des Extremums und das sonstige qualitative Verhalten von f_s , wie es in Abbildung 4.2 skizziert ist. Entsprechend erhält man, daß f_s für s mit $s^2 \in \left(\frac{\sigma_-}{\epsilon_-}, s_+^2 \right]$ wie in Abbildung 4.3 aussieht.

i) *Bemerkung:* Es gilt

$$c_v g'_s = 2\alpha_1 \epsilon f_s.$$

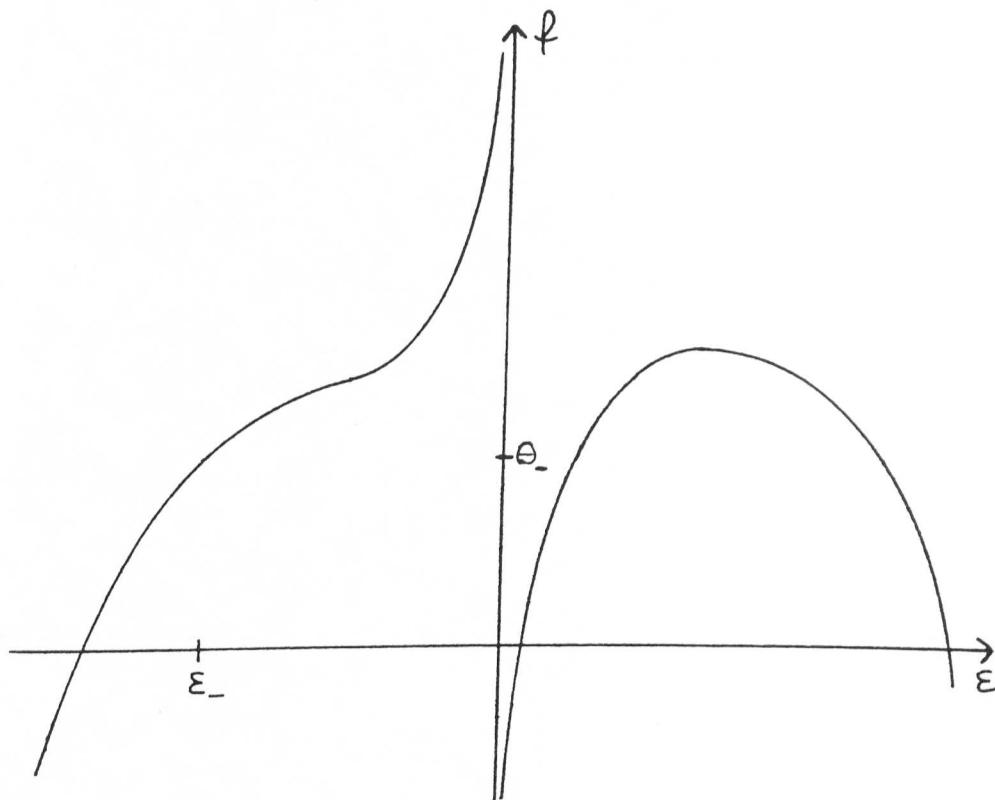


Abbildung 4.2: $s^2 \in [s_-^2, \frac{\sigma_-}{\epsilon_-})$

Wir definieren nun für alle s mit $s^2 \in [s_-^2, \frac{\sigma_-}{\epsilon_-})$

$$f_{max}^+(s) := \sup_{\epsilon > 0} f_s(\epsilon).$$

Da wir $s_- > s_{min}$ gewählt hatten, gilt für alle s die $s^2 \in [s_-^2, \frac{\sigma_-}{\epsilon_-})$ erfüllen

$$f_{max}^+(s) > \theta_-.$$

Sei nun c_v so groß, daß gilt

- 1) $\sup_{\epsilon > 0} g_s(\epsilon) < f_{max}^+(s)$ für alle s mit $s^2 \in [s_-, \frac{\sigma_-}{\epsilon_-})$,
- 2) das lokale Minimum von g_s ist für alle $s \in [s_-, s_+]$ positiv.

Diese beiden Bedingungen garantieren uns, zusammen mit der obigen Bemerkung, die Existenz von mindestens zwei positiven Schnittpunkten von f_s und g_s im Intervall (ϵ_-, ∞) (siehe Abbildung 4.4). Seien $\bar{\epsilon}_M(s) < \bar{\epsilon}_+(s)$ die beiden kleinsten Schnittpunkte im Intervall (ϵ_-, ∞) . Dann gilt

$$(18) \quad \epsilon f'_s(\bar{\epsilon}_M(s)) > \epsilon g'_s(\bar{\epsilon}_M(s)) \quad \text{und} \quad f'_s(\bar{\epsilon}_+(s)) < g'_s(\bar{\epsilon}_+(s)).$$

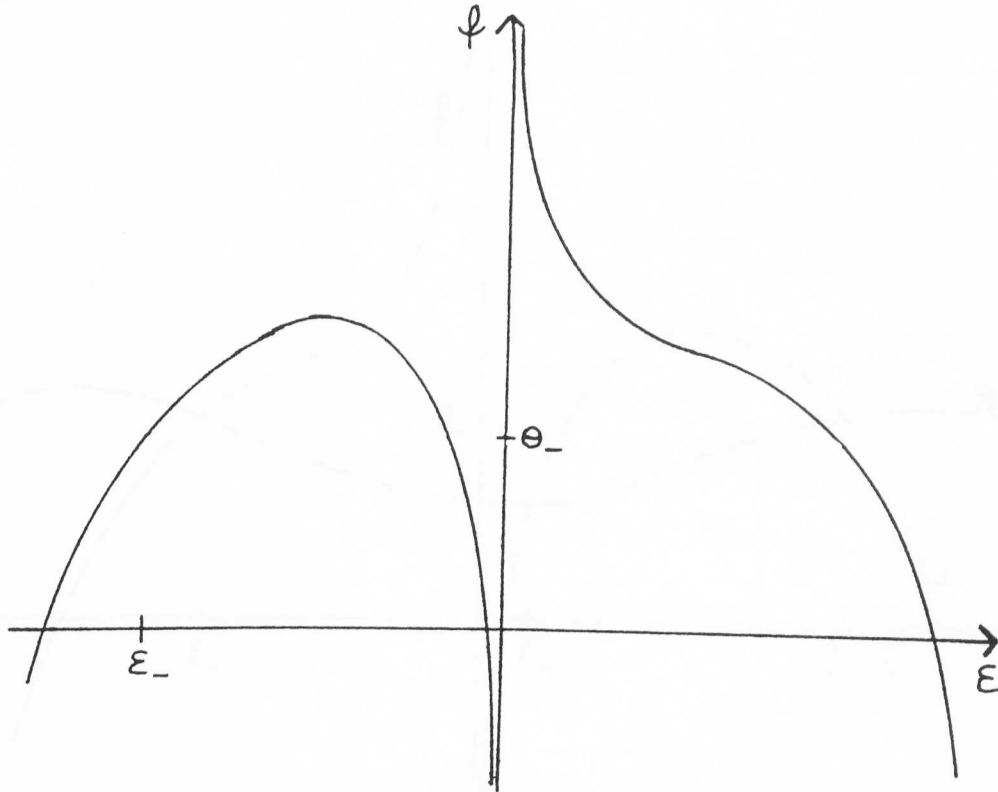


Abbildung 4.3: $s^2 \in \left(\frac{\sigma_-}{\varepsilon_-}, s_+^2\right]$

Die Ungleichung $f'_s(\varepsilon_-) > g'_s(\varepsilon_-)$ folgt aus Bemerkung i). Setzen wir nun

$$\bar{\theta}_M(s) := f_s(\bar{\varepsilon}_M(s)) = g_s(\bar{\varepsilon}_M(s)) \quad \text{und} \quad \bar{\theta}_+(s) := f_s(\bar{\varepsilon}_+(s)) = g_s(\bar{\varepsilon}_+(s)),$$

so folgt das Lemma.

q.e.d.

Unser Ziel ist es ein $\bar{s} \in \mathbb{R}^+$ und einen Orbit zu finden, der $(\varepsilon_-, 0, \theta_-)$ und $(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s))$ miteinander verbindet. Für den Nachweis der Existenz eines solchen Orbits brauchen wir, wie schon im isothermen Fall, Aussagen über den Conley-Index der Ruhpunkte. Das folgende Lemma liefert die benötigten Aussagen.

4.3 Lemma:

Die Ruhpunkte $(\varepsilon_-, 0, \theta_-)$ und $(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s))$ sind für alle $s \in [s_-, s_+]$ hyperbolisch. Außerdem gilt:

- 1) Die Linearisierung in diesen Punkten besitzt einen positiven Eigenwert und zwei Eigenwerte mit negativem Realteil.

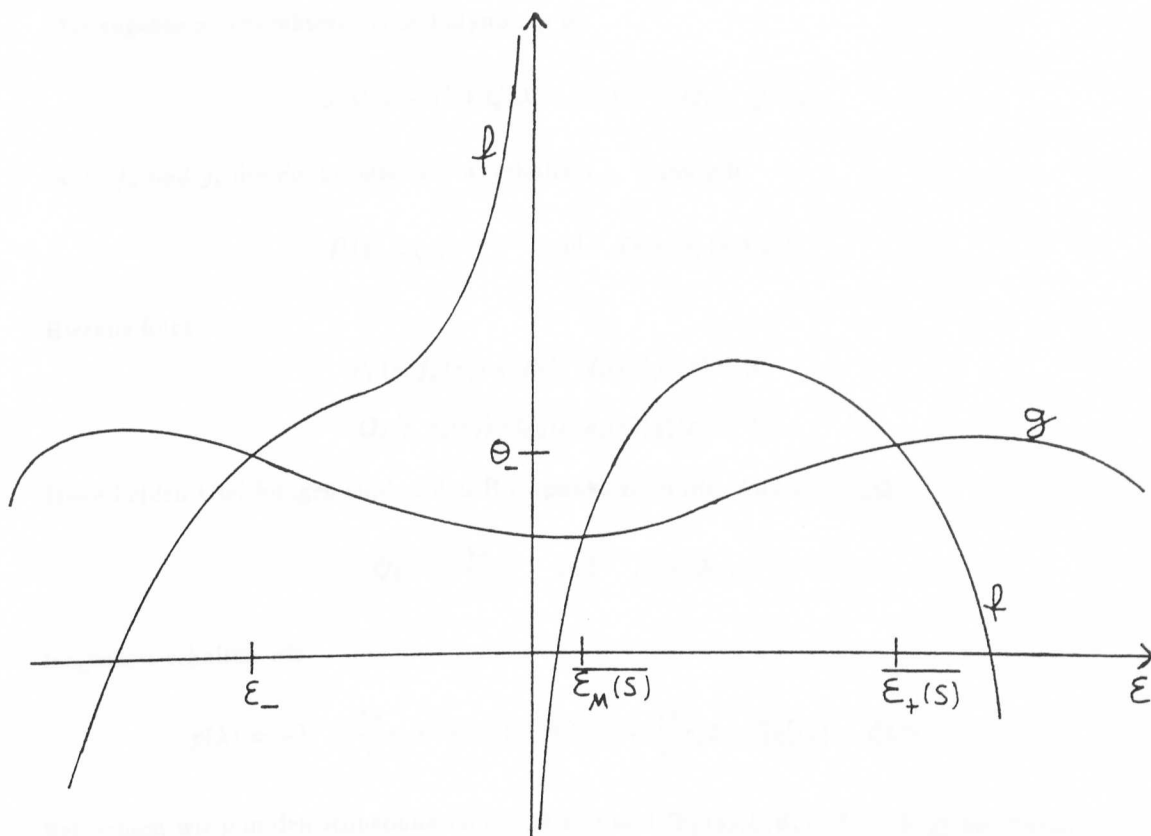


Abbildung 4.4: $s^2 \in \left[s_-^2, \frac{\sigma_-}{\varepsilon_-}\right)$

2)

$$h(\{(\varepsilon_-, 0, \theta_-)\}) = \Sigma^1,$$

$$h(\{(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s))\}) = \Sigma^1.$$

Beweis:

Wir wollen die Differentialgleichung in den Ruhepunkten linearisieren. Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= w \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \theta) - \sigma(\varepsilon_-, \theta_-) - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-) &=: P(\varepsilon, \theta) \\ \theta' &= \frac{\gamma s}{\kappa} \left(-\bar{U} + \bar{U}_- + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 \right) + \frac{\gamma s}{2\kappa} w^2 &=: Q(\varepsilon, \theta) + \frac{\gamma s}{2\kappa} w^2 \end{aligned} \right\} =: R(\varepsilon, w, \theta).$$

Ist $(\tilde{\varepsilon}, 0, \tilde{\theta})$ ein Ruhepunkt, so gilt

$$R'(\tilde{\varepsilon}, 0, \tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ P_\varepsilon & 0 & P_\theta \\ Q_\varepsilon & 0 & Q_\theta \end{pmatrix} (\tilde{\varepsilon}, 0, \tilde{\theta}).$$

Das zugehörige charakteristische Polynom p ist

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + Q_\theta \lambda^2 + P_\varepsilon \lambda - P_\varepsilon Q_\theta + Q_\varepsilon P_\theta.$$

Seien f_s und g_s die Funktionen aus Abschnitt 4.1. Dann gilt

$$P(\varepsilon, f_s(\varepsilon)) = 0 \quad \text{und} \quad Q(\varepsilon, g_s(\varepsilon)) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(\varepsilon, f_s(\varepsilon)) + P_\theta(\varepsilon, f_s(\varepsilon)) f'_s(\varepsilon) &= 0, \\ Q_\varepsilon(\varepsilon, g_s(\varepsilon)) + Q_\theta(\varepsilon, g_s(\varepsilon)) g'_s(\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen sind in den Ruhepunkten erfüllt. Außerdem gilt

$$Q_\theta = -\frac{\gamma s}{\kappa} c_v \quad \text{und} \quad P_\theta = 2\alpha_1 \varepsilon.$$

Insgesamt erhalten wir

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{\gamma s}{\kappa} c_v \lambda^2 + P_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}, f(\tilde{\varepsilon})) \lambda + \frac{\gamma s}{\kappa} c_v 2\alpha_1 \tilde{\varepsilon} (g'_s(\tilde{\varepsilon}) - f'_s(\tilde{\varepsilon})).$$

Betrachten wir p in den Ruhepunkten $(\varepsilon_-, 0, \theta_-)$ und $(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s))$, so folgt aus Lemma 4.2 (Teil 3) und da s positiv ist

$$p(0) > 0.$$

Daraus folgt die Existenz einer positiven reellen Nullstelle λ_1 . Seien λ_2 und λ_3 die weiteren Nullstellen.

Behauptung: $\operatorname{Re}(\lambda_2), \operatorname{Re}(\lambda_3) < 0$.

Es gilt

$$i) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0,$$

$$ii) \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0.$$

Falls nun λ_2 und λ_3 reell sind, so folgt aus ii)

$$\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0.$$

Damit i) gelten kann, muß also

$$\lambda_2, \lambda_3 < 0$$

erfüllt sein.

Haben dagegen λ_2 und λ_3 einen echt imaginären Anteil, so gilt

$$\lambda_2 = x + iy \quad \text{und} \quad \lambda_3 = x - iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + 2x$$

und somit $x < 0$. Damit ist 1) gezeigt. Der Teil 2) der Behauptung folgt dann unmittelbar aus Proposition 3.13.

q.e.d.

4.2 EINE STARKE LJAPUNOVFUNKTION

Zunächst definieren wir, was wir unter einer starken Ljapunovfunktion verstehen wollen.

4.4 Definition:

Sei

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen})$$

Lipschitz-stetig. Eine stetige Funktion $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **starke Ljapunovfunktion** für die Differentialgleichung

$$y' = f(y) ,$$

wenn V streng monoton fallend auf nichtkonstanten Lösungen ist.

In dem folgenden Lemma wird gezeigt, daß auf der Menge $\{(\varepsilon, w, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta > 0\}$ eine starke Ljapunovfunktion existiert. Die Beschränkung auf positive Temperaturen entspricht der physikalischen Situation und ist deshalb für uns keine Einschränkung. Wir beweisen das Lemma für allgemeinere freie Energien als (15), nämlich

$$(19) \quad F(\theta, \varepsilon, \varepsilon_x) = F_0(\theta) + \theta F_1(\varepsilon) + F_2(\varepsilon) + \frac{\gamma^2}{2} \varepsilon_x^2 .$$

Dabei sei $F_0 \in C^2(\mathbb{R}^+)$ und $F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R})$. Die Größen σ, S und $\bar{U}$ ergeben sich aus F wie üblich

$$\sigma = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} ,$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \theta} = -F'_0(\theta) + F_1(\varepsilon) ,$$

$$\bar{U} = F + \theta S - \frac{\gamma^2}{2} \varepsilon_x^2 .$$

4.5 Lemma:

Unter der Voraussetzung, daß F_1 auf keinem Intervall konstant ist, besitzt das Differentialgleichungssystem

$$(20) \quad \begin{aligned} \varepsilon' &= w, \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \theta) - \sigma(\varepsilon_-, \theta_-) - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-), \\ \theta' &= \frac{\gamma s}{\kappa} \left[-\bar{U} + \bar{U}_- + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right]. \end{aligned}$$

auf der Menge $\{(\varepsilon, w, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta > 0\}$ die starke Ljapunovfunktion

$$V(\varepsilon, w, \theta) := S(\varepsilon, \theta) + \frac{1}{\theta} \left[-\bar{U} + \bar{U}_- + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right].$$

Beweis:

Sei $(\varepsilon(z), w(z), \theta(z))$ eine Lösung von (20). Zunächst zeigen wir

$$\frac{d}{dz} V(\varepsilon(z), w(z), \theta(z)) \leq 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} V(\varepsilon(z), w(z), \theta(z)) &= \\ &= -\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \theta} \theta' - \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon \partial \theta} \varepsilon' - \frac{1}{\theta^2} \theta' \underbrace{\left[-\bar{U} + \bar{U}_- + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right]}_{= \frac{\kappa}{s\gamma} \theta'} + \\ &\quad + \frac{1}{\theta} \left(-\frac{\partial F}{\partial \theta} \theta' - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \varepsilon' + \frac{\partial F}{\partial \theta} \theta' + \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varepsilon} \varepsilon' + \theta \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \theta} \theta' + s^2(\varepsilon - \varepsilon_-) \varepsilon' + \sigma_- \varepsilon' + w w' \right) \\ &= -\frac{\kappa}{s\gamma} \left(\frac{\theta'}{\theta} \right)^2 + \frac{1}{\theta} \left(\varepsilon' \underbrace{(-\sigma + \sigma_- + s^2(\varepsilon - \varepsilon_-))}_{= -w'} + \varepsilon' w' \right) \\ &= -\frac{\kappa}{s\gamma} \left(\frac{\theta'}{\theta} \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Annahme: Es existieren $z, z' \in \mathbb{R}$ ($z < z'$) mit

$$(\varepsilon(z), w(z), \theta(z)) \neq (\varepsilon(z'), w(z'), \theta(z')),$$

so daß

$$V(\varepsilon(z), w(z), \theta(z)) = V(\varepsilon(z'), w(z'), \theta(z')).$$

im dem Punkt
gilt

$$V(1) = S(1, \theta)$$

so

da der velle
nach rechts
läuft

Wenn die
Entropie
einen Wert
annimmt

(wir haben
die Grund-
koordinaten)

Dann gilt

$$V(\varepsilon(\tau), w(\tau), \theta(\tau)) \equiv \text{const} \quad \text{für alle } \tau \in [z, z'].$$

Also gilt

$$0 = \frac{d}{d\tau} V(\varepsilon(\tau), w(\tau), \theta(\tau)) = -\frac{\kappa}{s\gamma} \frac{1}{\theta^2(\tau)} (\theta'(\tau))^2 \quad \text{für alle } \tau \in [z, z'].$$

Somit hat man

$$\theta' = \frac{\gamma s}{\kappa} \left[-U + \bar{U}_- + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right] = 0 \quad \text{auf } [z, z'].$$

Daraus folgt (vgl die Definition von V mit der obigen Identität)

$$S(\varepsilon, \theta) \equiv \text{const} \quad \text{auf } [z, z'].$$

Da

$$S(\varepsilon, \theta) = -F'_0(\theta) + F_1(\varepsilon)$$

und da F_1 auf keinem Intervall konstant ist, folgt

$$\varepsilon \equiv \text{const} \quad \text{und} \quad w = \varepsilon' = 0 \quad \text{auf } [z, z']$$

im Widerspruch zur Annahme. Damit ist die Behauptung des Lemmas gezeigt.

q.e.d.

Das nächste Lemma verdeutlicht die Beziehung zwischen der Ljapunovfunktion V und der Funktion H aus Kapitel 3.2. Diese Beziehung zwischen V und H wird im folgenden Abschnitt wichtig werden, um die isolierende Umgebung des nichtisothermen Falles mit der des isothermen Falles in Zusammenhang zu bringen. Zur Erinnerung geben wir H noch einmal an (im folgenden geben wir die Abhängigkeit von θ explizit an)

$$H(\varepsilon, \theta) = \int_{\varepsilon_-}^{\varepsilon} [\sigma(\tau, \theta) - \sigma_- - s^2(\tau - \varepsilon_-)] d\tau.$$

4.6 Lemma:

Ergeben sich V und H aus einer freien Energie der Form (19), so gilt

$$\theta V(\varepsilon, w, \theta) = \frac{1}{2}w^2 - H(\varepsilon, \theta) - F_0(\theta) - F_1(\varepsilon_-)\theta + F_0(\theta_-) - \theta_- F'_0(\theta_-).$$

Beweis:

Die folgenden Identitäten sind direkte Konsequenzen aus der Definition von V und H .

$$\begin{aligned}\theta V &= \theta S - \overline{U} + \overline{U}_- + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{1}{2}w^2 \\ &= \theta S - F - \theta S + \frac{\gamma^2}{2}w^2 + \overline{U}_- + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{1}{2}w^2 \\ &= -F_0(\theta) - \theta F_1(\varepsilon) - F_2(\varepsilon) + \overline{U}_- + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{1}{2}w^2.\end{aligned}$$

Führen wir die Integration in H aus, so ergibt sich

$$H(\varepsilon, \theta, s) = \theta(F_1(\varepsilon) - F_1(\varepsilon_-)) + F_2(\varepsilon) - F_2(\varepsilon_-) - \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) - \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\theta V &= \frac{1}{2}w^2 - H(\varepsilon, \theta) - F_0(\theta) + \overline{U}_- - \theta F_1(\varepsilon_-) - F_2(\varepsilon_-) \\ &= \frac{1}{2}w^2 - H(\varepsilon, \theta) - F_0(\theta) - F_1(\varepsilon_-)\theta + F_0(\theta_-) - \theta_- F'_0(\theta_-).\end{aligned}$$

q.e.d.

Die Aussage des folgenden Lemmas wird benötigt, um bei der Definition der isolierenden Umgebung den Ruhepunkt $(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s))$ auszuschliessen.

4.7 Lemma:

Sei V aus einer freien Energie der Form (15) hervorgegangen. Außerdem seien die Ruhepunkte $(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s))$ und $(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s))$ (mit $s \in [s_-, s_+]$) wie in Lemma 4.2. Dann gilt für alle $s \in [s_-, s_+]$

$$\begin{aligned}V(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s)) &< V(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s)), \\ V(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s)) &< V(\varepsilon_-, 0, \theta_-).\end{aligned}$$

Beweis:

Da $(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s))$ und $(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_M(s))$ Ruhepunkte sind, gilt

$$\begin{aligned}V(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s)) &= c_v \ln \bar{\theta}_M(s) - F_1(\bar{\varepsilon}_M(s)), \\ V(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s)) &= c_v \ln \bar{\theta}_+(s) - F_1(\bar{\varepsilon}_+(s)).\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& V(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s)) - V(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s)) \\
&= c_v \ln \bar{\theta}_M(s) - c_v \ln \bar{\theta}_+(s) - F_1(\bar{\varepsilon}_M(s)) + F_1(\bar{\varepsilon}_+(s)) \\
&= c_v \ln g(\bar{\varepsilon}_M(s)) - c_v \ln g(\bar{\varepsilon}_+(s)) - F_1(\bar{\varepsilon}_M(s)) + F_1(\bar{\varepsilon}_+(s)) \\
&= - \int_{\bar{\varepsilon}_M(s)}^{\bar{\varepsilon}_+(s)} c_v \frac{g'(t)}{g(t)} dt + \int_{\bar{\varepsilon}_M(s)}^{\bar{\varepsilon}_+(s)} F_1'(t) dt \\
&= \int_{\bar{\varepsilon}_M(s)}^{\bar{\varepsilon}_+(s)} F_1'(t) \left(1 - \frac{f(t)}{g(t)}\right) dt.
\end{aligned}$$

Die letzte Identität ergibt sich aus

$$c_v g'(t) = F_1'(t) f(t).$$

In unserem Fall gilt

$$F_1'(t) = 2\alpha_1 t.$$

Wir betrachten $t \in (\bar{\varepsilon}_M(s), \bar{\varepsilon}_+(s))$. Nach Definition von $\bar{\varepsilon}_M(s)$ bzw. $\bar{\varepsilon}_+(s)$ und den Überlegungen aus Abschnitt 4.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}
t > 0 &\implies f(t) > g(t) \implies t \left(1 - \frac{f}{g}\right) < 0, \\
t < 0 &\implies f(t) < g(t) \implies t \left(1 - \frac{f}{g}\right) < 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\bar{\varepsilon}_M(s)}^{\bar{\varepsilon}_+(s)} 2\alpha_1 t \left(1 - \frac{f(t)}{g(t)}\right) dt < 0 \quad (\text{da } t \left(1 - \frac{f}{g}\right) \not\equiv 0).$$

Das bedeutet

$$V(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s)) < V(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s)).$$

Entsprechend gilt

$$\begin{aligned}
& V(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s)) - V(\varepsilon_-, 0, \theta_-) \\
&= \int_{\varepsilon_-}^{\bar{\varepsilon}_M(s)} 2\alpha_1 t \left(\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right) dt.
\end{aligned}$$

Mit den Überlegungen aus Abschnitt 4.1 erhalten wir für $t \in (\varepsilon_-, \bar{\varepsilon}_M(s))$

$$t < 0 \implies f(t) > g(t) \implies t \left(\frac{f}{g} - 1\right) < 0,$$

$$t > 0 \implies f(t) < g(t) \implies t \left(\frac{f}{g} - 1 \right) < 0.$$

Also ergibt sich

$$V(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s)) < V(\varepsilon_-, 0, \theta_-).$$

q.e.d.

Im folgenden Lemma wird die ω -Limesmenge (bzw. die α -Limesmenge) einer Differentialgleichung, die eine starke Ljapunovfunktion besitzt, charakterisiert. Zu den Begriffen ω -Limesmenge und α -Limesmenge siehe Amman [1]. Sei

$$f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen})$$

eine Lipschitz-stetige Funktion. Die Definition der starken Ljapunovfunktion überträgt sich analog auf den Abschluß einer offenen Menge.

4.8 Lemma:

Die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = f(y)$$

besitze auf $\bar{\Omega}$ eine starke Ljapunovfunktion V . Sei u eine Lösung von $(*)$. Dann bestehen $\omega(u)$ und $\alpha(u)$ nur aus Ruhepunkten.

Beweis:

Sei $u_0 \in \omega(u)$. Dann existiert eine Folge

$$(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad t_k \rightarrow \infty,$$

so daß

$$u(t_k) \rightarrow u_0 \in \bar{\Omega}.$$

Aus der Stetigkeit von V folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(u(t_k)) = V(u_0) =: V_0.$$

Da $t_k \rightarrow \infty$ und da V monoton fallend auf Lösungen ist, folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(u(t)) = V_0.$$

Also gilt

$$\omega(u) \subset V^{-1}(V_0).$$

Da $\omega(u)$ invariant ist, läßt sich $\omega(u)$ als Vereinigung von Orbits darstellen, die alle ganz in $V^{-1}(V_0)$ liegen. Weil V eine starke Ljapunovfunktion ist, kann $\omega(u)$ nur aus Ruhepunkten bestehen. Die Aussage über die α -Limesmenge zeigt man analog.

q.e.d.

4.3 EXISTENZBEWEIS IM NICHTISOTHERMEN FALL

In diesem Kapitel wollen wir Satz 4.1 beweisen. Dazu erweitern wir das Differentialgleichungssystem (17) um eine Gleichung für s . Insgesamt untersuchen wir das folgende System:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \varepsilon' = w, \\
 & w' = \sigma(\varepsilon, \theta) - \sigma_- - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-), \\
 & \theta' = \frac{\gamma s}{\kappa} \left[-c_v(\theta - \theta_-) - \alpha_2 \varepsilon^4 + \alpha_1 \theta_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon_-^4 - \alpha_1 \theta_1 \varepsilon_-^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right], \\
 & s' = \beta \Psi(\varepsilon, w, \theta, s),
 \end{aligned}$$

mit $\beta \in \mathbb{R}^+$. Dabei sei Ψ eine Lipschitz-stetige Funktion, die positiv in Umgebungen $\mathcal{U}_1$ des Punktes $(\varepsilon_-, 0, \theta_-, s_-)$ und $\mathcal{U}_2$ des Punktes $(\bar{\varepsilon}_+(s_+), 0, \bar{\theta}_+(s_+), s_+)$ sowie negativ in Umgebungen $\mathcal{U}_3$ des Punktes $(\varepsilon_-, 0, \theta_-, s_+)$ und $\mathcal{U}_4$ des Punktes $(\bar{\varepsilon}_+(s_-), 0, \bar{\theta}_+(s_-), s_-)$ ist. Ansonsten sei Ψ Null. Die obigen Umgebungen sollen klein sein. Die genauen Kleinheitsbedingungen werden im Verlauf des Beweises angegeben. Die Größen s_- und s_+ seien wie in Abschnitt 4.1 gewählt.

Als nächsten Schritt wählen wir eine isolierende Umgebung. Im wesentlichen verdicken wir dazu die Menge N aus Kapitel 3.2 in θ -Richtung. Es sei

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(s) &:= \mathcal{M}_-(s) \cup \mathcal{M}_+(s) \cup \\
 &\quad \{(\varepsilon, w, \theta) \mid \varepsilon \geq \varepsilon_-, \varepsilon \leq \varepsilon_+(s), w \geq 0, \theta \in [\theta_- - \bar{\delta}(s), \theta_- + \bar{\delta}(s)], \lambda(s) \leq V(\varepsilon, w, \theta, s) \leq D(s)\}
 \end{aligned}$$

Dabei sei $\varepsilon_+(s)$ wie in Kapitel 3.2. Außerdem definieren wir

$$\mathcal{M}_-(s) := M_-(s) \times [\theta_- - \bar{\delta}(s), \theta_- + \bar{\delta}(s)]$$

und

$$\mathcal{M}_+(s) := M_+(s) \times [\theta_- - \bar{\delta}(s), \theta_- + \bar{\delta}(s)].$$

Wir wählen nun c_v so groß, daß

$$(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s)) \in \mathcal{N}(s).$$

Die Größe λ soll stetig von s abhängen und so gewählt sein, daß

$$V(\bar{\varepsilon}_M(s), 0, \bar{\theta}_M(s), s) < \lambda(s) < \min(V(\bar{\varepsilon}_+(s), 0, \bar{\theta}_+(s), s), V(\varepsilon_-, 0, \theta_-, s))$$

und

$$(\mathcal{M}_-(s) \cup \mathcal{M}_+(s)) \cap \{V \leq \lambda(s)\} = \emptyset$$

gilt. Dabei ist V die starke Ljapunovfunktion aus dem letzten Abschnitt. Die Abhängigkeit der Funktion V von s geben wir ab jetzt explizit an. Daß wir $\lambda(s)$ so wählen können, folgt aus Lemma 4.7. Weiterhin soll D stetig von s abhängen und so groß gewählt sein, daß

$$(\mathcal{M}_-(s) \cup \mathcal{M}_+(s)) \cap \{V \geq D(s)\} = \emptyset$$

gilt. Aus Lemma 4.6 folgt nun, daß die Menge

$$\{(\varepsilon, w, \theta) \in \mathcal{N}(s) \mid \theta = \theta_-\}$$

mit der Menge $N(s)$ aus Kapitel 3.2 übereinstimmt (bei entsprechender Wahl von δ und C) und somit isolierende Umgebung für das System

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= w, \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \theta_-) - \sigma_- - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-)\end{aligned}$$

ist. Wir betrachten nun die folgende Familie von Gleichungen

$$(I_\theta) \quad \begin{aligned}\varepsilon' &= w, \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \theta) - \sigma_- - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-).\end{aligned}$$

Hängt ein System von Differentialgleichungen stetig von einem Parameter ab und hat man für einen bestimmten Parameterwert eine isolierende Umgebung, so ist diese Menge isolierende Umgebung für eine ganze Umgebung dieses Parameterwertes. Dabei kann man auch noch stetige Störungen der isolierenden Umgebung zulassen (vgl. Conley [2], Kapitel 4). Es folgt also die Existenz eines $\bar{\delta}(s)$, so daß die Mengen

$$\mathcal{N}(s) \cap \{\theta = \tilde{\theta}\}$$

für alle

$$\tilde{\theta} \in [\theta_- - \bar{\delta}(s), \theta_- + \bar{\delta}(s)]$$

isolierende Umgebungen für das System (I_θ) sind. Wir definieren nun (vgl. die Gleichung für die Temperatur in (21))

$$T(\varepsilon, w, s) := -\alpha_2 \varepsilon^4 + \alpha_1 \theta_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon_-^4 - \alpha_1 \theta_1 \varepsilon_-^2 + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2.$$

Als zusätzliche Bedingung müssen wir nun c_v so groß wählen, daß für alle (ε, w) mit

$$(\varepsilon, w, \theta \pm \bar{\delta}(s)) \in \mathcal{N}(s)$$

die Ungleichung

$$(22) \quad |T(\varepsilon, w, s)| < c_v \bar{\delta}(s)$$

erfüllt ist. Jetzt betrachten wir das System.

$$(23) \quad \begin{aligned} \varepsilon' &= w, \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \theta) - \sigma_- - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-), \\ \theta' &= \frac{\gamma s}{\kappa} [c_v(\theta - \theta_-) + T(\varepsilon, w, s)]. \end{aligned}$$

Nach Definition von T ist dies gerade die Differentialgleichung (17). Wenn wir nun $\frac{\gamma}{\kappa}$ klein wählen, so ist $\mathcal{N}(s)$ eine isolierende Umgebung für das System (23). Um dies nachzuweisen, untersuchen wir das Verhalten am Rand (siehe Bemerkung 3.3). Betrachten wir zunächst den folgenden Teil des Randes

$$\{(\varepsilon, w, \theta) \in \mathcal{N}(s) \mid \theta = \theta_- + \bar{\delta}(s) \text{ oder } \theta = \theta_- - \bar{\delta}(s)\}.$$

Aus (22) folgt, daß durch diesen Teil des Randes die Orbits echt in $\mathcal{N}(s)$ hineinlaufen. Dieser Teil des Randes erfüllt also die charakterisierende Bedingung aus Bemerkung 3.3. Da die Mengen

$$\{(\varepsilon, w, \theta) \in \mathcal{N}(s) \mid \theta = \tilde{\theta}\} \quad \left(\tilde{\theta} \in [\theta_- - \bar{\delta}(s), \theta_- + \bar{\delta}(s)]\right)$$

isolierende Umgebungen des Systems $(I_{\tilde{\theta}})$ sind und somit die Charakterisierung isolierender Umgebungen aus Bemerkung 3.3 erfüllen, folgt, daß für kleines $\frac{\gamma}{\kappa}$ der restliche Teil des Randes der Charakterisierung aus Bemerkung 3.3 genügt (Stetigkeitsargument). Da der Parameter s in dem kompakten Intervall $[s_-, s_+]$ variiert, können wir die Kleinheitsbedingungen an $\frac{\gamma}{\kappa}$ und die Bedingung an c_v gleichmäßig für alle $s \in [s_-, s_+]$ stellen.

Es sei

$$\mathcal{N} := \bigcup_{s \in [s_-, s_+]} \mathcal{N}(s) \times \{s\}$$

i) Behauptung: Falls die Umgebungen $(\mathcal{U}_i)_{i=1, \dots, 4}$ hinreichend klein gewählt sind, ist $\mathcal{N}$ eine isolierende Umgebung für die Differentialgleichung (21).

Die Mengen $(\mathcal{U}_i)_{i=1, \dots, 4}$ seien so klein gewählt, daß

$$\mathcal{U}_i \cap \{(\varepsilon, w, \theta, s) \mid s \in [s_-, s_+]\} \subset \mathcal{N}.$$

Wir zeigen, daß alle Orbits, die durch den Rand von $\mathcal{N}$ laufen, nicht vollständig in $\mathcal{N}$ liegen (Vgl. Bemerkung 3.3). Da $\mathcal{N}(s)$ isolierende Umgebung für das System (21) ist, bleibt nur noch etwas für den folgenden Teil des Randes zeigen

$$\{(\varepsilon, w, \theta, s) \in \mathcal{N} \mid s = s_- \text{ oder } s = s_+\}.$$

Durch die Definition von Ψ und $\mathcal{N}$ haben wir erreicht, daß in diesen Mengen kein Ruhezpunkt liegt. Außerdem verlassen Lösungen, die durch $\mathcal{U}_i$ ($i = 1, \dots, 4$) laufen, $\mathcal{N}$ entweder für z wachsend oder für z fallend.

Annahme: Es existiert eine Lösung $(\varepsilon, w, \theta, s)$, für die $(\varepsilon, w, \theta, s)(\bar{z}) \in \mathcal{N}(s_-)$ gilt (mit einem $\bar{z} \in \mathbb{R}$) und die $\mathcal{N}$ nicht verläßt.

Nach den obigen Bemerkungen liegt diese Lösung ganz in $\mathcal{N}(s_-)$ und ist Lösung von (21) mit $s = s_-$ (da der Orbit mit den $\mathcal{U}_i$ einen leeren Schnitt hat). Das System (21) besitzt eine starke Ljapunovfunktion, woraus folgen würde, daß $(\varepsilon(z), w(z), \theta(z))$ für $z \rightarrow \pm\infty$ gegen Ruhepunkte konvergieren müssen (Lemma 4.8). Das steht im Widerspruch dazu, daß die Menge $\{s = s_-\} \cap \mathcal{N}$ keine Ruhepunkte enthält. Analog argumentiert man für $s = s_+$. Damit ist die Behauptung i) gezeigt.

ii) *Behauptung:*

$$h(I(\mathcal{N})) = \bar{0}.$$

Es sei

$$\mathcal{N}^E := \{(\varepsilon, w, \theta, s) \in \mathcal{N} \mid \text{es gibt ein } z' > 0 \text{ so, daß } (\varepsilon, w, \theta, s) \cdot z \notin \mathcal{N} \text{ für alle } z \in (0, z']\}.$$

Es gilt

$$\mathcal{N}^E \subset \partial\mathcal{N}.$$

Die Menge $\mathcal{N}^E$ muß auf jeden Fall in der zweiten Komponente eines Indexpaares zu $\mathcal{N}$ enthalten sein. Wir wollen nun $\mathcal{N}^E$ so zu einer Menge $\mathcal{N}_2$ erweitern, daß $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_2)$ ein Indexpaar ist. Analog zum isothermen Fall, müssen Teile der Menge

$$\{(\varepsilon, w, \theta, s) \in \mathcal{N} \mid s = s_- \text{ oder } s = s_+\}$$

zu $\mathcal{N}_2$ gehören. Die Mengen $\mathcal{U}_1 \cap \{s = s_+\}$ und $\mathcal{U}_3 \cap \{s = s_+\}$ sind in $\mathcal{N}^E$ enthalten. Der Rand dieser Mengen muß auf Grund von Bedingung i) aus der Definition von Indexpaaren zu $\mathcal{N}_2$ gehören. Wählen wir $\frac{\gamma}{\kappa}$ klein, so verlassen die instabilen Orbits zu $(\varepsilon_-, 0, \theta_-, s_-)$ die Menge $\mathcal{N}$ durch $\mathcal{M}_1(s_-)$ bzw. $\mathcal{M}_3(s_-)$ (dies ist für (I_{θ_-}) richtig und folgt hier auf Grund der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von einem Parameter). Dabei seien $\mathcal{M}_1(s_-)$ und $\mathcal{M}_3(s_-)$ entsprechend zum isothermen Fall definiert. Wählen wir nun $\mathcal{U}_1$ klein genug, so gilt dies auch für alle Orbits, die den Rand von $\mathcal{U}_1$ verlassen. Beim Ruhepunkt $(\varepsilon_-, 0, \theta_-, s_+)$ gehen wir analog vor. Die Menge

$$\mathcal{N}_2 := \overline{\mathcal{N}^E} \cup \left\{ (\varepsilon, w, \theta, s) \in \mathcal{N} \mid \exists (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{\theta}, \bar{s}) \in \overline{\mathcal{N}^E} \text{ und ein } z' > 0, \text{ so daß } (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{\theta}, \bar{s}) \cdot (0, z'] \subset \mathcal{N} \text{ und } (\bar{\varepsilon}, \bar{w}, \bar{\theta}, \bar{s}) \cdot z' = (\varepsilon, w, \theta, s) \right\}.$$

enthält diese oben beschriebenen Orbits. Jetzt liegt die gleiche topologische Situation vor, wie im isothermen Fall. Die Mengen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}_2$ sind nur in θ -Richtung verdickt. Durch Kontraktion ziehen wir die Menge auf das $\theta = \theta_-$ Niveau zusammen. Gehen wir jetzt zum Quotienten $\mathcal{N}/\mathcal{N}_2$ über, so erhalten wir analog zu Kapitel 3.2

$$h(I(\mathcal{N})) = [\mathcal{N}/\mathcal{N}_2] = \bar{0}.$$

Wie im isothermen Fall zeigt man mit Hilfe von Lemma 4.3:

$$h(I(\mathcal{M}_-)) = \Sigma^2 \quad \text{und} \quad h(I(\mathcal{M}_+)) = \Sigma^1.$$

Aus der Ungleichung

$$h(I(\mathcal{N})) = \bar{0} \neq \Sigma^2 \vee \Sigma^1 = h(I(\mathcal{M}_-)) \vee h(I(\mathcal{M}_+))$$

folgt die Existenz einer Lösung $(\varepsilon_\beta, w_\beta, \theta_\beta, s_\beta)$, die in $\mathcal{N}$ liegt, aber nicht vollständig in $\mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+$ verläuft. Für diese Lösung gelte ohne Einschränkung

$$(\varepsilon_\beta, w_\beta, \theta_\beta, s_\beta)(0) \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+).$$

Wie im Kapitel 3.2 schließen wir auf die Existenz einer Teilfolge, die gleichmäßig auf Kompakta gegen eine Lösung $(\varepsilon, w, \theta, s)$ des Systems

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= w \\ w' &= \sigma(\varepsilon, \theta) - \sigma_- - s^2(\varepsilon - \varepsilon_-) \\ \theta' &= \frac{\gamma s}{\kappa} \left[-c_v(\theta - \theta_-) - \alpha_2 \varepsilon^4 + \alpha_1 \theta_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon_-^4 - \alpha_1 \theta_1 \varepsilon_-^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_-(\varepsilon - \varepsilon_-) + \frac{s^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_-)^2 + \frac{1}{2}w^2 \right] \\ s' &= 0 \end{aligned}$$

konvergiert. Es gilt also $s \equiv \bar{s}$ ($\bar{s} \in \mathbb{R}$). Außerdem gilt

$$(\varepsilon, w, \theta, s)(0) \in \overline{\mathcal{N} \setminus (\mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+)}.$$

Damit kann die Grenzlösung nicht konstant sein. Da für das System (17) eine starke Ljapunovfunktion existiert, muß $(\varepsilon, w, \theta)(z)$ für $z \rightarrow \pm\infty$ gegen Ruhepunkte konvergieren. In der Menge $\mathcal{N}(\bar{s})$ liegen nach Definition nur zwei Ruhepunkte. Diese beiden Ruhepunkte sind

$$(\varepsilon_-, 0, \theta_-) \quad \text{und} \quad (\bar{\varepsilon}_+(\bar{s}), 0, \bar{\theta}_+(\bar{s})).$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes 4.1.

Literatur:

- [1] AMANN, HERBERT:

Gewöhnliche Differentialgleichungen. De Gruyter Verlag, Berlin, New York, 1983.

- [2] CONLEY, CHARLES:

Isolated Invariant Sets and the Generalized Morse Index. C.B.M.S. Regional Conference Series in Mathematics, No. 38, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1978.

- [3] CONLEY, CHARLES AND GARDNER, ROBERT:

An application of the generalized Morse Index to Travelling Wave Solutions of a Competitive Reaction-Diffusion Model. Indiana Univ. Math. J. 33 (1984), pp 319-342.

- [4] FALK, F.:

Model Free Energy Mechanics and Thermodynamics of Shape Memory Alloys. Acta Metallurgica Vol. 28 (1980), pp 1773-1780.

- [5] FALK, F.:

Ginzburg-Landau Theory of Static Domain Walls in Shape Memory Alloys. Zeitschrift für Physik B - Condensed Matter 51 (1983), pp 177-185.

- [6] FALK, F.:

Ginzburg-Landau Theory and Solitary Waves in Shape Memory Alloys. Zeitschrift für Physik B - Condensed Matter 54 (1984), pp 159-167.

- [7] GRINFELD, MICHAEL:

Nonisothermal Dynamic Phase Transitions. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XLVII, No. 1, March 1989, pp 71-84.

- [8] SMOLLER, JOEL:

Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer Verlag, New York, 1983.

- [9] SPANIER, EDWIN H.:

Algebraic Topology. Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[10] SPREKELS, JÜRGEN UND ZHENG SONGMU:

Global Solutions to the Equations of a Ginzburg-Landau Theory for Structural Phase Transitions in Shape Memory Alloys. Physica D 39 (1989), pp 59-76.